

Manuel Vaz Guedes

CORRENTE ALTERNADA

sistemas polifásicos assimétricos

Faculdade de Engenharia — Universidade do Porto

2005

CORRENTE ALTERNADA

sistemas polifásicos assimétricos

Manuel Vaz Guedes

FACULDADE de ENGENHARIA
UNIVERSIDADE do PORTO

Índice

	<i>Introdução</i>
1.	<i>O Método das Componentes Simétricas</i>
1.1	Componentes Simétricas Trifásicas
1.1.1	Sistemas Componentes
1.1.2	Redução das Grandezas de Fase às Componentes Simétricas
1.2	Medida das Componentes Simétricas
1.2.1	Medida da Intensidade da Corrente num Circuito Trifásico
1.3	Sistemas Trifásicos Não Sinusoidais
1.4	Outros Sistemas Polifásicos de Componentes Simétricas
1.4.1	Sistema Hexafásico
1.4.2	Sistema difásico
2.	<i>Aplicação às Máquinas Eléctricas</i>
2.1	Grandezas Eléctricas
2.2	Máquinas Eléctricas Estáticas
2.3	Máquina Eléctrica Rotativa — motor de indução
2.3.1	Estudo do Motor de Indução
2.3.2	Consequências do Regime Assimétrico
2.3.3	Análise Crítica
2.3.4	Conclusão
	<i>Bibliografia</i>
A	Representação das Grandezas Alternadas Sinusoidais (resumo)
B	Sistema Trifásico Simétrico
C	Circuito Trifásico Equilibrado

pp. 1 a 34

CORRENTE ALTERNADA

sistemas polifásicos assimétricos

Manuel Vaz Guedes

FACULDADE de ENGENHARIA
UNIVERSIDADE do PORTO

No estudo dos sistemas de energia eléctrica polifásicos ocorrem situações em que é necessário determinar as grandezas eléctricas características respectivas, quando ocorrem regimes de funcionamento assimétricos permanentes. Também na análise do funcionamento das máquinas eléctricas de corrente alternada polifásicas existe a necessidade de estudar os regimes de funcionamento assimétricos, provocados pela forma como é feita a respectiva alimentação, ou pelas características do circuito eléctrico de carga da máquina ou, ainda, por aspectos construtivos da máquina eléctrica.

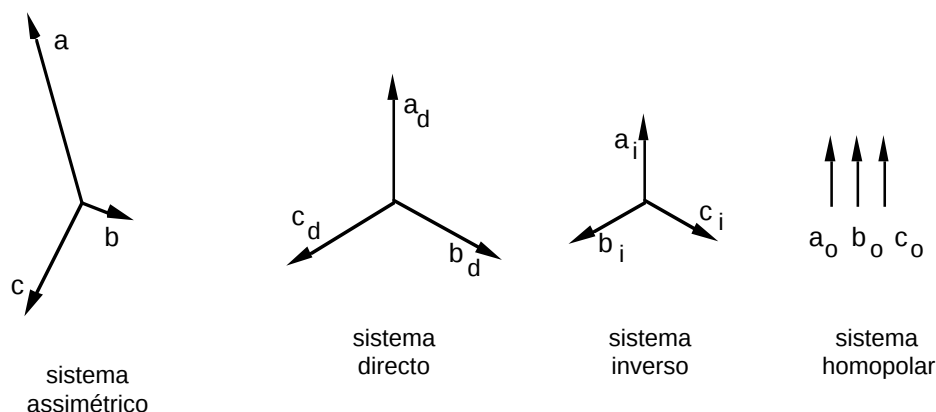


Fig. 1.1 — Sistema trifásico assimétrico e sistemas componentes simétricos

Para efectuar, de uma forma simples, uma análise envolvendo um regime assimétrico permanente de funcionamento de uma máquina eléctrica polifásica é utilizada a *Teoria das Componentes Simétricas*, investigada por C. L. Fortescue a partir de 1913 e formulada e publicada em 1918. Quando procedia a estudos sobre compensadores de fase para redes de alimentação monofásicas de sistemas de tracção eléctrica, Fortescue constatou que “... a solução reduzia-se sempre à soma de duas ou mais soluções simétricas”; daí estabeleceu uma transformação passiva, reversível e unívoca entre o sistema polifásico assimétrico e os sistemas polifásicos simétricos. Essencialmente, o

método de resolução consiste em reduzir um problema envolvendo um sistema polifásico assimétrico à solução de um problema envolvendo dois ou mais sistemas simétricos separados (segregados), que, por isso, são resolvidos apenas para uma fase componente.

No estudo dos sistemas polifásicos considera-se que,

sistema trifásico simétrico — é um sistema de três grandezas sinusoidais, com a mesma frequência com o mesmo valor eficaz, e tal que duas grandezas consecutivas estão esfasadas, uma relativamente à outra, por um múltiplo inteiro do intervalo angular ($2\pi/3$).

No sistema trifásico pode-se decompor um sistema de grandezas trifásicas assimétrico numa soma de sistemas de grandezas trifásicas simétricas — que são as suas *componentes simétricas*.

Um sistema trifásico assimétrico pode-se decompor na soma de três sistemas sinusoidais: um sistema trifásico simétrico directo, um sistema trifásico simétrico inverso e um sistema homopolar.

A caracterização da assimetria de um sistema trifásico assimétrico é, normalmente, feita pelo valor do *grau de assimetria*, que é a razão entre o valor eficaz da componente inversa e o valor eficaz da componente directa: $\varepsilon_G = G_i/G_d$. Esta definição pressupõe o conhecimento das componentes simétricas em grandeza (amplitude) e em fase (ângulo de fase).

Mas na norma CEI-34.1 para Máquinas Eléctricas Rotativas, a caracterização do desequilíbrio de tensões é feita através da relação entre o excedente da componente inversa sobre a componente directa, expresso em percentagem: $[100 \cdot (U_i - U_d)/U_d] \%$.

Para se determinar aquele valor é necessário um conjunto complexo de medidas e de cálculos. Por isso, a publicação CEI-892 estabelece um método expedito de caracterização do desequilíbrio do sistema de tensões.

Nesta publicação, a caracterização do desequilíbrio de tensões é feita através de uma grandeza: *a percentagem do desequilíbrio da tensão*. Esta grandeza dá o valor, expresso em percentagem, da relação entre o afastamento máximo relativamente ao valor médio dos valores eficazes das tensões e o valor médio dos valores eficazes das tensões:

$$[(100 \cdot \text{Max}(U_f - U_{\text{med}}))/U_{\text{med}}]\%,$$

com $U_{\text{med}} = (U_A + U_B + U_C)/3$ e $f = A, B, C$.

Este valor, expedito, pode diferir muito do valor do grau de dissimetria pelo que a própria publicação CEI-892 aconselha que em situações em que a percentagem de desequilíbrio da tensão seja superior a 5% é necessário efectuar um estudo completo da componente inversa da corrente eléctrica.

A decomposição do sistema trifásico assimétrico num conjunto de sistemas com sequências (ordem de sucessão) de fase diferentes provoca simplificações no estudo das

máquinas eléctricas, porque a máquina submetida à acção de um sistema trifásico assimétrico passa a ser estudada — desde que se possa aplicar o Teorema da Sobreposição — por um modelo diferente, e independente, para cada sistema trifásico simétrico componente. E o estudo do comportamento da máquina submetida à acção de um sistema trifásico simétrico de grandezas eléctricas faz-se pelo estudo de apenas uma fase, devido ao equilíbrio dos circuitos da máquina.

Desde que o circuito eléctrico trifásico da máquina seja equilibrado, sendo a carga distribuída igualmente entre os condutores do sistema trifásico, aplicando o Método das Componentes Simétricas, consegue-se efectuar a separação (ou segregação) dos diferentes sistemas simétricos componentes, e depois efectuar o estudo analítico da máquina em cada sistema simétrico de uma forma independente do estudo feito para os outros sistemas.

E o estudo do comportamento da máquina submetida à acção de um sistema trifásico simétrico de grandezas eléctricas faz-se pelo estudo de apenas uma fase, devido ao equilíbrio dos circuitos da máquina.

Considerando que as relações que regem o funcionamento da máquina eléctrica são lineares pode-se considerar que o comportamento da máquina sob a acção do sistema trifásico assimétrico resulta da soma dos comportamentos devidos a cada um dos sistemas simétricos; isto é, aplica-se o Teorema da Sobreposição.

Algumas das grandezas características da máquina eléctrica num determinado sistema simétrico componente podem ser as mais indicadas para caracterizar certos fenómenos no funcionamento da máquina;

o aquecimento exagerado de um motor de indução trifásico alimentado por um sistema trifásico assimétrico de tensões é explicado pelo comportamento do motor quando alimentado pelo sistema simétrico componente trifásico inverso, desde que se possa considerar que o circuito eléctrico trifásico da máquina é equilibrado.

As diversas potências eléctricas, que caracterizam o funcionamento de uma máquina, também podem ser decompostas nos diferentes sistemas de componentes simétricas; mas a definição dessas grandezas é delicada e está em discussão.

A maioria das máquinas eléctricas são construídas de forma a apresentarem equilíbrio nos órgãos eléctricos e magnéticos (máquinas equilibradas). No entanto, existe sempre a possibilidade de funcionarem instaladas em redes eléctricas que apresentem assimetria no sistema trifásico das suas grandezas eléctricas características. Existem, porém, casos em que as máquinas eléctricas apresentam um desequilíbrio estrutural intrínseco. Todas estas situações são a causa da necessidade de aplicação do Método das Componentes Simétricas no estudo das Máquinas Eléctricas.

1. Método das Componentes Simétricas

No estudo do Método das Componentes Simétricas é importante o conhecimento das formas de representação das grandezas alternadas sinusoidais; essencialmente, a representação fasorial e a representação simbólica.

Ver o apêndice A — Representação das grandezas Alternadas Sinusoidais

No estudo do Método vão encontrar-se as expressões, a que é possível dar uma forma

matricial, que permitem reduzir um sistema polifásico assimétrico aos seus sistemas polifásicos simétricos componentes.

Para aplicação do Método no estudo das máquinas eléctricas são importantes os sistemas de grandezas trifásicos, os sistemas difásicos, e, têm uma importância relativa menor, os sistemas hexafásicos de grandezas alternadas.

1.1 Componentes Simétricas Trifásicas

A aplicação do Método das Componentes Simétricas a um sistema trifásico assimétrico de grandezas eléctricas, consistirá na obtenção de três sistemas trifásicos equivalentes: um sistema de três fasores iguais e sinfásicos formando o *sistema homopolar*; e num conjunto de dois sistemas trifásicos simétricos com diferente sucessão de fases, um *sistema directo*, e um *sistema inverso*.

Cada um dos sistemas componentes, directo ou inverso, é formado por fasores com a mesma amplitude e esfasados entre si de 120° ($2\pi/3$ rad); a ordem de sucessão desses fasores — a sucessão ou sequência de fases — é diferente em cada um dos sistemas componentes.

Sistema Simétrico Directo

Este sistema simétrico de grandezas trifásicas é caracterizado pelos fasores sucessivos, a,b,c terem igual amplitude e estarem esfasados *entre si* de 120° , ou $2\pi/3$ rad. A sucessão de fases resulta de os fasores sucessivos estarem esfasados de 120° *em atraso*. Utilizando a notação simbólica (exponencial e polar) para representar as grandezas de fase, ver fig. 1.2,

$$\begin{aligned}\underline{G}_{ad} &= \underline{G}_{ad} \cdot \exp(j0) = \underline{G}_{ad} \cdot (1 \angle 0) \\ \underline{G}_{bd} &= \underline{G}_{ad} \cdot \exp(j(4\pi/3)) = \underline{G}_{ad} \cdot (1 \angle 4\pi/3) \\ \underline{G}_{cd} &= \underline{G}_{ad} \cdot \exp(j(2\pi/3)) = \underline{G}_{ad} \cdot (1 \angle 2\pi/3)\end{aligned}\tag{1.1-1}$$

Este sistema trifásico simétrico recebe a designação de *sistema directo* (ou *de sequência positiva*) porque a sucessão dos máximos das grandezas do sistema ocorre na ordem natural, ou directa, das letras representativas das respectivas fases — a, b, c.

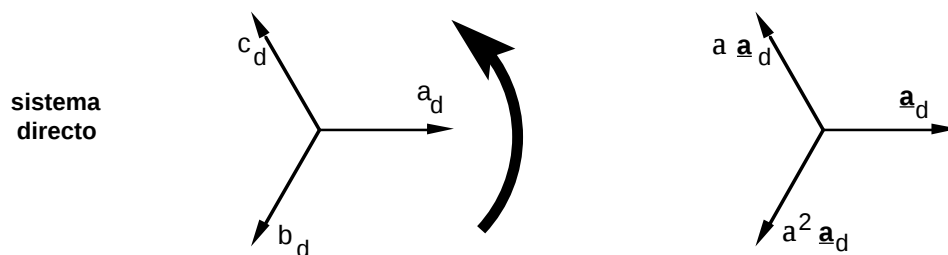


Fig. 1.2 – Sucessão de fases num sistema trifásico directo

Para assinalar a rotação de um fasor de $2\pi/3$ rad no sentido directo, ou trigonométrico, multiplica-se o fasor por $\exp(j2\pi/3)$; esta expressão comporta-se, assim, como um operador matemático — *operador de sequência*.

O operador de sequência, neste tipo de estudos, é representado pela letra *a*; portanto, o operador —

$$a = \exp(j(2\pi/3)) = (1 \angle 2\pi/3),$$

— quando aplicado ao fasor representativo de uma grandeza fasorial provoca-lhe uma rotação de 120° no sentido directo ou trigonométrico.

Atendo à fórmula de Euler o operador de sequência $a = \exp(j(2\pi/3))$, pode ser representado por um número complexo,

$$a = \exp(j(2\pi/3)) = \cos(2\pi/3) + j \sin(2\pi/3) = -(1/2) + j(\sqrt{3}/2) \quad (1.1-2)$$

e verifica-se que possui, entre outras, as seguintes propriedades,

Propriedades do operador de sequência $a = \exp(j2\pi/3)$

$$1 = \exp(0) = 1 + j0$$

$$a = \exp(j2\pi/3) = -(1/2) + j(\sqrt{3}/2)$$

$$a^2 = \exp(j4\pi/3) = -(1/2) - j(\sqrt{3}/2)$$

$$a^3 = \exp(j2\pi) = 1 + j0 = 1$$

$$a^4 = \exp(j8\pi/3) = \exp(j2\pi/3) = -(1/2) + j(\sqrt{3}/2) = a$$

$$a^5 = \exp(j10\pi/3) = \exp(j4\pi/3) = -(1/2) - j(\sqrt{3}/2) = a^2$$

$$1 + a + a^2 = 0 = 0 + j0$$

$$a - a^2 = j\sqrt{3}$$

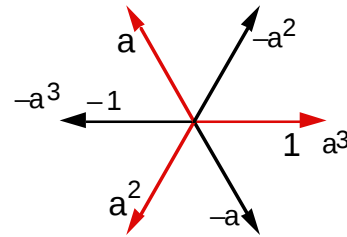
$$a^2 - a = -j\sqrt{3}$$

$$-a = \exp(j\pi) \cdot \exp(j2\pi/3) = \exp(j5\pi/3)$$

$$a^* = a^2$$

$$a^{2*} = a$$

$$-a^2 = \exp(j\pi) \cdot \exp(j4\pi/3) = \exp(j\pi/3)$$



Desde que esteja fixada a posição, e a amplitude, do fasor das grandezas eléctricas de uma fase do sistema directo, imediatamente estão determinados os fasores (módulo e fase) das outras fases dessa grandeza. Para o sistema trifásico directo verifica-se que:

$$\underline{G}_{ad} = \underline{G}_{ad} \quad \underline{G}_{bd} = a^2 \underline{G}_{ad} \quad \underline{G}_{cd} = a \underline{G}_{ad} \quad (1.1-3)$$

Justificar, com o auxílio de uma figura, a acção do operador a .

Sistema Simétrico Inverso

Este sistema de grandezas trifásicas é caracterizado pelos fasores sucessivos, a, b, c terem a mesma amplitude e estarem esfasados *entre si* de 120° , ou $2\pi/3$ rad. A sucessão de fases resulta de os fasores sucessivos estarem esfasados de 120° *em avanço*. Utilizando a notação simbólica, e o operador a , para representar as grandezas de fase, ver fig. 1.3,

$$\underline{G}_{ai} = \underline{G}_{ai} \cdot \exp(j0) = \underline{G}_{ai} (1 \angle 0)$$

$$\underline{G}_{bi} = \underline{G}_{ai} \cdot \exp(j(2\pi/3)) = \underline{G}_{ai} (1 \angle 2\pi/3) = a \underline{G}_{ai} \quad (1.1-4)$$

$$\underline{G}_{ci} = \underline{G}_{ai} \cdot \exp(j(4\pi/3)) = \underline{G}_{ai} (1 \angle 4\pi/3) = a^2 \underline{G}_{ai}$$

Este sistema é chamado de *sistema inverso* (ou *de sequência negativa*) porque a sucessão dos máximos das grandezas do sistema ocorre na ordem inversa das letras representativas das respectivas fases — c, b, a .

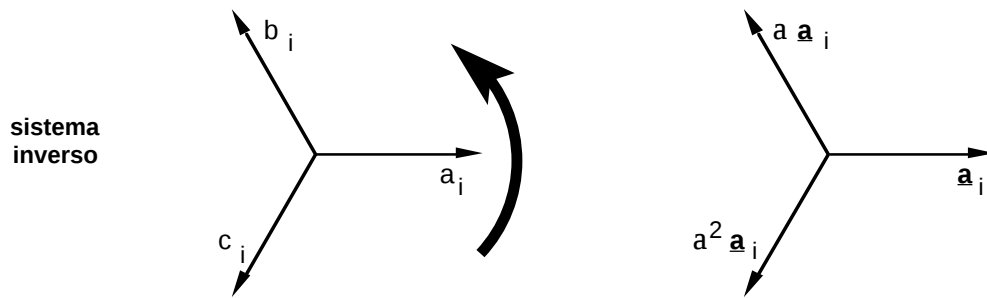


Fig. 1.3 – Sucessão de fases num sistema trifásico inverso

Note-se que o sistema trifásico inverso resulta do sistema trifásico directo por troca de duas fases {daí a expressão “*inversão de fases*”}.

Sistema Homopolar

Este sistema componente é caracterizado pelos seus três fasores terem igual amplitude e terem um esfasamento nulo entre si: têm igual ângulo de fase (sinfásicos). Por isso, uma das características do *sistema homopolar* (ou *de sequência nula*) é que todos os respectivos fasores estão em fase, portanto, formam um sistema *sinfásico*.

$$\underline{G}_{ao} = \underline{G}_{bo} = \underline{G}_{co} \quad (1.1-5)$$

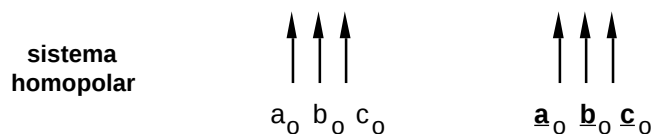


Fig. 1.4 – Sucessão de fases num sistema trifásico homopolar

Caracterizados os diferentes sistemas simétricos componentes, resta determinar a relação das componentes simétricas que determinam as grandezas assimétricas de fase.

O sistema trifásico homopolar de tensões e de correntes tem um comportamento característico nos circuitos trifásicos de cargas monofásicas:

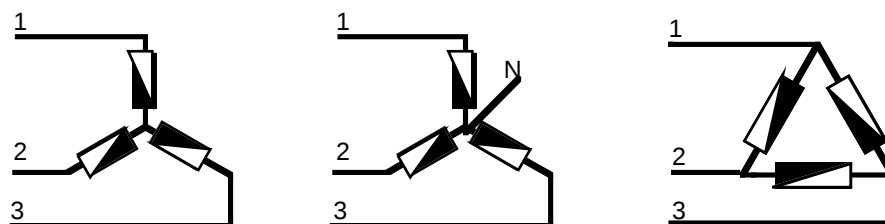
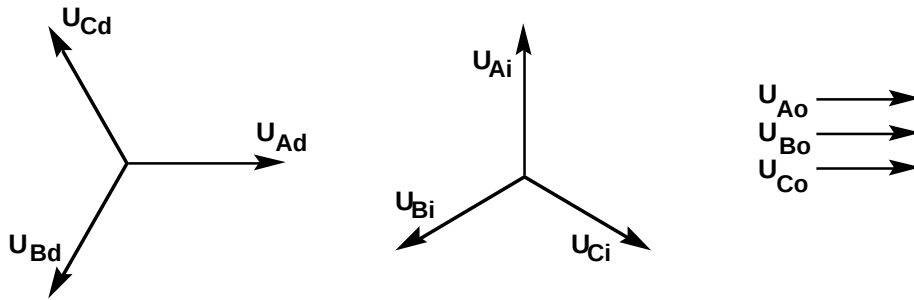


Fig. 1.5 – Tipos de ligações de um sistema trifásico de cargas monofásicas

- as *tensões homopolares* não podem existir nas tensões compostas, mas podem existir nas tensões simples independentemente da ligação do neutro.
- as *correntes homopolares* não podem aparecer nas linhas de uma ligação em triângulo, ou nos ramos de uma estrela com o neutro isolado.
- as *correntes homopolares* podem circular na malha de um circuito

trifásico ligado em triângulo, e podem circular nas linhas de uma ligação em estrela com o neutro ligado (à terra por exemplo).



ver apêndice B

Fig. 1.6 – Sistemas simétricos componentes da tensão

Nas normas americanas os sistemas componentes são designados por outros índices: sistema directo (positive sequence) índice 1, ($U_1 = U_d$); sistema inverso (negative sequence) índice 2, ($U_2 = U_i$); e sistema homopolar (zero sequence) índice 0, ($U_0 = U_o$).

Redução das Grandezas de Fase às Componentes Simétricas

As grandezas de fase apresentam-se como uma composição das correspondentes componentes simétricas. Uma grandeza assimétrica numa determinada fase é igual à soma das correspondentes componentes simétricas das diferentes sequências daquela fase:

$$\begin{aligned}\underline{G}_a &= \underline{G}_{ad} + \underline{G}_{ai} + \underline{G}_{ao} \\ \underline{G}_b &= \underline{G}_{bd} + \underline{G}_{bi} + \underline{G}_{bo} \\ \underline{G}_c &= \underline{G}_{cd} + \underline{G}_{ci} + \underline{G}_{co}\end{aligned}\tag{1.1-6}$$

Atendendo aos respectivos valores, como foram definidos em (1.1-1), (1.1-4), e (1.1-5) recorrendo ao operador a , podem-se escrever as expressões em função da grandeza que serve de referência ao ângulo de fase $\underline{G}_a = \underline{G}_a \cdot \exp(j0) = \underline{G}_a \cdot (1 \angle 0)$:

$$\begin{aligned}\underline{G}_a &= \underline{G}_{ad} + \underline{G}_{ai} + \underline{G}_{ao} & 1) \\ \underline{G}_b &= a^2 \underline{G}_{ad} + a \underline{G}_{ai} + \underline{G}_{ao} & 2) \\ \underline{G}_c &= a \underline{G}_{ad} + a^2 \underline{G}_{ai} + \underline{G}_{ao} & 3)\end{aligned}\tag{1.1-7}$$

Esta expressão (1.1-7) traduz a aplicação do Teorema de Stockvis-Fortescue:

Três fasores quaisquer tomados numa determinada ordem podem sempre obter-se por composição (sem repetição) de três sequências de três fasores: uma *directa*, outra *inversa* e a terceira *homopolar*.

A esta expressão (1.1-7) pode dar-se uma forma matricial,

$$\{\underline{G}_a, \underline{G}_b, \underline{G}_c\}^T = [F] \cdot \{\underline{G}_{ad}, \underline{G}_{ai}, \underline{G}_{ao}\}^T,$$

com

$$[\underline{F}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.1-8)$$

Somando membro a membro $\{1\} + \{2\} + \{3\}$ as equações da expressão (1.1-7), e atendendo à propriedade do operador a , $1 + a + a^2 = 0$, obtém-se:

$$\underline{G}_0 = (1/3) \cdot (\underline{G}_a + \underline{G}_b + \underline{G}_c) \quad (1.1-9)$$

Multiplicando a segunda equação do sistema (1.1-7) por a , $\{a \cdot \text{eq. 2}\}$, e a terceira equação por a^2 , $\{a^2 \cdot \text{eq. 3}\}$, somando as duas equações assim obtidas e simplificando, atendendo às propriedades do operador a , obtém-se para a componente directa:

$$\underline{G}_{ad} = (1/3) \cdot (\underline{G}_a + a \underline{G}_b + a^2 \underline{G}_c) \quad (1.1-10)$$

Multiplicando a segunda equação do sistema (1.1-7) por a^2 , $\{a^2 \cdot \text{eq. 2}\}$, e a terceira equação por a , $\{a \cdot \text{eq. 3}\}$, somando as duas equações assim obtidas e simplificando, atendendo às propriedades do operador a , obtém-se para a componente inversa:

$$\underline{G}_{ai} = (1/3) \cdot (\underline{G}_a + a^2 \underline{G}_b + a \underline{G}_c) \quad (1.1-11)$$

Obtém-se, assim, a expressão geral de redução das grandezas de um sistema trifásico assimétrico às respectivas componentes simétricas:

$$\begin{aligned} \underline{G}_{ad} &= (1/3) \cdot (\underline{G}_a + a \underline{G}_b + a^2 \underline{G}_c) \\ \underline{G}_{ai} &= (1/3) \cdot (\underline{G}_a + a^2 \underline{G}_b + a \underline{G}_c) \\ \underline{G}_{ao} &= (1/3) \cdot (\underline{G}_a + \underline{G}_b + \underline{G}_c) \end{aligned} \quad (1.1-12)$$

A esta expressão de transformação pode-se dar uma forma matricial, $\{\underline{G}_{ad}, \underline{G}_{ai}, \underline{G}_{ao}\}_T = [\underline{F}]^{-1} \cdot \{\underline{G}_a, \underline{G}_b, \underline{G}_c\}_T$, com

$$[\underline{F}]^{-1} = \left(\frac{1}{3}\right) \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.1-13)$$

Pode-se, portanto, estabelecer a relação, na expressão (1.1-8), entre a matriz de transformação $[\underline{F}]$ e a matriz $[\underline{C}_{13}]^{-1}$, utilizada nos estudos da Teoria Generalizada das Máquinas Eléctricas, embora alguns autores atribuam a essa expressão a designação $[\underline{C}_{13}]$!...

Conhecido um elemento de cada um dos sistemas componentes, $\{\underline{G}_{ad}, \underline{G}_{ai}, \underline{G}_{ao}\}$, podem-se determinar os restantes elementos, $\{\underline{G}_{bd}, \underline{G}_{bi}, \underline{G}_{bo}\}$ e $\{\underline{G}_{cd}, \underline{G}_{ci}, \underline{G}_{co}\}$, atendendo às características do respectivo sistema trifásico, conforme (1.1-1), (1.1-4) e (1.1-5).

A redução de um sistema trifásico assimétrico de correntes eléctricas às suas componentes simétricas é feita mediante a expressão (1.1-12).

$$\{\underline{I}_{dio}\} = [\underline{F}]^{-1} \cdot \{\underline{I}_{abc}\} \quad \{\underline{I}_{abc}\} = [\underline{F}] \cdot \{\underline{I}_{dio}\} \quad (1.1-14)$$

Neste caso das correntes eléctricas é importante notar que a componente homopolar da corrente é igual a $(1/3)$ da soma das correntes eléctricas em cada fase:

$$I_0 = (1/3) \cdot (I_a + I_b + I_c).$$

Quando a soma das correntes nas fases do sistema trifásico é igual a zero, caso de uma ligação em estrela sem neutro acessível, a componente homopolar das correntes não pode existir.

Exemplo_1.1

Considerando um sistema assimétrico de correntes eléctricas trifásicas $\{I_a = 8 - j6, I_b = 13 - j10, I_c = 2 + j10\}$ A, pretende-se determinar as respectivas componentes simétricas.

Com a forma matricial da expressão (1.1-15), $\{I_{dio}\} = [F]^{-1} \cdot \{I_{abc}\}$, e atendendo à definição do operador $a = 1 \angle 120^\circ$, assim como aos meios de cálculo disponíveis, determina-se:

$$I_{ad} = 6,1 \angle 11,2^\circ \text{ A}, \quad I_{ai} = 7,6 \angle -137,3^\circ \text{ A}, \quad I_{ao} = 7,9 \angle -14,6^\circ \text{ A}$$

A correcção da resposta pode ser avaliada através da determinação das componentes de fase assimétricas com a expressão $\{I_{abc}\} = [F] \cdot \{I_{dio}\}$

— · —

Charles L. Fortescue (1898–1936)

Charles LeGeyt Fortescue licenciou-se em Engenharia Electrotécnica em 1898 pela University of Kingston, em Ontário, Canadá, e em 1901 começou a trabalhar no projecto de circuitos induzidos para geradores e motores na empresa americana Westinghouse Electric and Manufacturing Company, de Pittsburgh, empresa onde se desenvolveu toda a sua carreira técnica.



Em 1913 iniciou o estudo da alimentação assimétrica de motores de indução trifásicos, destinados ao accionamento de locomotivas pesadas, e alimentados por conversores mono-trifásicos. Nessa altura detectou que “... a solução *reduzia-se sempre à soma de duas ou mais soluções simétricas*”. Apresentou em 1918 o resultado da sua investigação num vasto e profundo artigo matemático “Method of Symmetrical Co-Ordinates Applied to the Solution of Polyphase Networks”, que complementou em 1920 com a publicação de um artigo sobre “Polyphase Power Representation by Means of Symmetrical Coordinates”.

Outros engenheiros da Westinghouse desenvolveram e aplicaram o Método na solução de problemas de sistemas eléctricos polifásicos. Surgiu em 1933 o primeiro livro, publicado por C. F. Wagner e R. D. Evans “Symmetrical Components”.

O trabalho de C. Fortescue na Westinghouse envolveu investigação e desenvolvimento no domínio da teoria do isolamento, do isolador de travessia com paredes capacitivas, e da teoria da protecção contra o raio. É considerado o mentor da aplicação do *fio de guarda* nas linhas de transmissão de energia.

A redução de um sistema trifásico assimétrico de tensões também poderia ser feita utilizando uma expressão análoga à expressão (1.1-12). No entanto no estudo das Máquinas Eléctricas interessa que a transformação entre os sistemas trifásico assimétrico e o sistema das suas componentes simétricas para uma fase, seja feita com invariância do valor da potência: $P_{dio} = P_{abc}$.

Para satisfazer esta restrição, é necessário que a redução da tensão obedeça à expressão: $\{U_{dio}\} = [F^*]_T \cdot \{U_{abc}\}$, porque

$$P_{dio} = \{U_{dio}\}_T \cdot \{I^*_{dio}\} = P_{abc} = \{U_{abc}\}_T \cdot \{I^*_{abc}\} = \{U_{abc}\}_T \cdot [F^*] \cdot \{I^*_{dio}\}$$

$$\{U_{dio}\}_T = \{U_{abc}\}_T \cdot [F^*]$$

$$\{U_{dio}\} = [F^*]_T \cdot \{U_{abc}\} \quad (1.1-15)$$

Atendendo às equações (1.1-14) e (1.1-15), para que a potência se mantenha invariante

na aplicação da transformada das componentes simétricas é necessário que $\{\underline{I}_{dio}\} = [\underline{F}]^{-1} \cdot \{\underline{I}_{abc}\}$ e $\{\underline{U}_{dio}\} = [\underline{F}^*]_T \cdot \{\underline{U}_{abc}\}$, e para que a expressão de transformação seja a mesma para a redução das correntes eléctricas e das tensões é necessário que a matriz de transformação seja tal que $[\underline{F}]^{-1} = [\underline{F}^*]_T$, ou que $[\underline{F}^*]_T \cdot [\underline{F}] = 1 = [\underline{F}]^{-1} \cdot [\underline{F}]$. Isto é, torna-se necessário que verifique a *condição de ortogonalidade*.

No estudo das Máquinas Eléctricas trifásicas, frequentemente, alguns autores utilizaram sistemas de componentes polifásicas em que a matriz de transformação das componentes simétricas utilizada $[\underline{F}']$ é a mesma para as tensões e para as correntes eléctricas, e que conserva as potências complexas no sistema original e no sistema transformado. Trata-se dos sistemas com componentes normalizadas, tal que $[\underline{F}'] = (1/\sqrt{3}) \cdot [\underline{F}]$; a matriz de transformação das componentes simétricas normalizada passa a ter a forma:

$$[\underline{F}']^{-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.1-16)$$

É a transformada normalizada de Fortescue, para a qual se verifica que $[\underline{F}']^{-1} = [\underline{F}']_T$, isto é, satisfaz a condição de ortogonalidade.

Um sistema trifásico de impedâncias é *desequilibrado* quando está distribuído desigualmente entre os condutores das fases, resultando que as impedâncias de cada fase têm amplitude diferente ou que os seus ângulos de fase são diferentes, $\underline{Z}_a \neq \underline{Z}_b \neq \underline{Z}_c$.

Um sistema de impedâncias *desequilibradas* também pode ser reduzido a um sistema de impedâncias *equilibradas*. Recorrendo, agora, às expressões para redução das correntes eléctricas, (1.1-15) e para redução das tensões, (1.1-16), mantendo invariante a potência, é possível determinar a expressão de redução para as impedâncias.

Atendendo a que $\{\underline{U}_{dio}\} = [\underline{Z}_{dio}] \cdot \{\underline{I}_{dio}\}$ e que $\{\underline{U}_{abc}\} = [\underline{Z}_{abc}] \cdot \{\underline{I}_{abc}\}$, resulta:

$$\begin{aligned} \{\underline{U}_{dio}\} &= [\underline{F}^*]_T \cdot \{\underline{U}_{abc}\} = [\underline{F}^*]_T \cdot [\underline{Z}_{abc}] \cdot \{\underline{I}_{abc}\} = [\underline{F}^*]_T \cdot [\underline{Z}_{abc}] \cdot [\underline{F}] \cdot \{\underline{I}_{dio}\} \\ \{\underline{U}_{dio}\} &= [\underline{Z}_{dio}] \cdot \{\underline{I}_{dio}\} = [\underline{F}^*]_T \cdot [\underline{Z}_{abc}] \cdot [\underline{F}] \cdot \{\underline{I}_{dio}\} \\ [\underline{Z}_{dio}] &= [\underline{F}^*]_T \cdot [\underline{Z}_{abc}] \cdot [\underline{F}] \end{aligned} \quad (1.1-17)$$

Quando na redução das componentes simétricas se utiliza uma matriz de transformação não ortogonalizada (1.1-13), a expressão para redução da matriz das impedâncias é:

$$[\underline{Z}_{dio}] = [\underline{F}]^{-1} \cdot [\underline{Z}_{abc}] \cdot [\underline{F}] \quad (1.1-18)$$

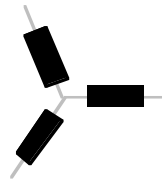
Exemplo_1.2

A equação eléctrica para o circuito estatórico de um motor de indução trifásico é $\{\underline{U}_{abc}\} = [\underline{Z}] \cdot \{\underline{I}_{abc}\}$.

A matriz das impedâncias $[\underline{Z}]$ é constituída pelos elementos da diagonal que têm a forma $\underline{Z}_1 = R_s + j\omega L_s$, e pelos elementos que traduzem a influência mútua dos fluxos criados pelas diversas bobinas. Surgem assim impedâncias que traduzem a influência da indução mútua das bobinas que estão esfasadas de 120° , $\underline{Z}_2$, e das bobinas que estão esfasadas de 240° ,

Z_3 .

Devido ao equilíbrio, característico desta máquina eléctrica, a matriz das impedâncias, — *impedâncias de fase* — é cíclica, porque em cada linha os elementos se sucedem numa sequência constante e cíclica: Z_1, Z_2, Z_3 .



$$\begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ Z_3 & Z_1 & Z_2 \\ Z_2 & Z_3 & Z_1 \end{bmatrix}$$

A redução da equação eléctrica estatórica às componentes simétricas permite obter para a matriz impedância transformada — *impedâncias de sequência*,

$$[Z'] = [E^*]^{-1} [Z] [E] = \begin{bmatrix} Z_d & 0 & 0 \\ 0 & Z_i & 0 \\ 0 & 0 & Z_o \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{cases} Z_d = Z_1 + a^2 \cdot Z_2 + a \cdot Z_3 \\ Z_i = Z_1 + a \cdot Z_2 + a^2 \cdot Z_3 \\ Z_o = Z_1 + Z_2 + Z_3 \end{cases}$$

Com esta transformação as equações eléctricas para as três fases do estator, que estavam ligadas através da matriz das impedâncias $[Z]$ ficam separadas (segregadas) em três equações independentes: $\{U_d\} = [Z_d] \cdot \{I_d\}$, $\{U_i\} = [Z_i] \cdot \{I_i\}$, $\{U_o\} = [Z_o] \cdot \{I_o\}$.

Podem, assim, resolver-se as três equações matriciais lineares {*que regem o funcionamento da máquina num sistema de coordenadas fictício*} e depois aplicar a transformação inversa para obter os valores reais das grandezas em estudo.

—...—

Pode-se concluir que:

- nas partes de uma estrutura que são equilibradas, as tensões e as correntes de uma sequência não têm influência nas tensões e nas correntes de outra sequência;
- se atribuem às máquinas impedâncias distintas para cada sequência — impedâncias de sequência —, impedâncias que são quantidades fixas e independentes umas das outras e independentes do grau de assimetria.

A redução de um sistema trifásico assimétrico às suas componentes simétricas também pode ser feita para a potência em consideração numa máquina eléctrica trifásica.

Numa máquina eléctrica trifásica (a,b,c) a potência total absorvida pela máquina é dada por $P_t + jQ_t = \underline{U}_a \cdot \underline{I}_a^* + \underline{U}_b \cdot \underline{I}_b^* + \underline{U}_c \cdot \underline{I}_c^*$.

Atendendo à redução de cada grandeza de fase às suas componentes simétricas, para a fase b, resulta:

$$\begin{aligned} \underline{U}_b \cdot \underline{I}_b^* &= (\underline{U}_d + \underline{U}_i + \underline{U}_o) \cdot (\underline{I}_d^* + \underline{I}_i^* + \underline{I}_o^*) = \\ &= \underline{U}_d \cdot \underline{I}_d^* + \underline{U}_d \cdot \underline{I}_i^* + \underline{U}_d \cdot \underline{I}_o^* + \\ &= \underline{U}_i \cdot \underline{I}_d^* + \underline{U}_i \cdot \underline{I}_i^* + \underline{U}_i \cdot \underline{I}_o^* + \\ &= \underline{U}_o \cdot \underline{I}_d^* + \underline{U}_o \cdot \underline{I}_i^* + \underline{U}_o \cdot \underline{I}_o^* \end{aligned} \quad (1.1-19)$$

Resultam expressões análogas para a potência das outras duas fases (a, c).

Nesta expressão (1.1-19) aparecem parcelas de dois tipos: $\underline{U}_r \cdot \underline{I}_r^*$ e $\underline{U}_r \cdot \underline{I}_s^*$ com $r, s \in \{d, i, o\}$. As parcelas do tipo $\underline{U}_r \cdot \underline{I}_r^*$ têm todas o coeficiente 1. As parcelas do tipo $\underline{U}_r \cdot \underline{I}_s^*$

são afectadas pelos coeficientes 1, a , a^2 , conforma a fase (a,b,c) das respectivas grandezas componentes. Na expressão global para a potência total existem, portanto, três termos da forma $3 \cdot \underline{U}_r \cdot \underline{I}_r^*$, e existem seis termos da forma $(1 + a + a^2) \cdot \underline{U}_r \cdot \underline{I}_s^*$, que são nulos, devido à propriedade do operador a . Assim,

$$P_t + jQ_t = 3 \cdot (\underline{U}_d \cdot \underline{I}_d^* + \underline{U}_i \cdot \underline{I}_i^* + \underline{U}_o \cdot \underline{I}_o^*) \quad (1.1.-20)$$

A potência total absorvida pela máquina é a soma das potências fornecidas por cada um dos sistemas componentes:

$$P_d + jQ_d = 3 \cdot \underline{U}_d \cdot \underline{I}_d^* \quad P_i + jQ_i = 3 \cdot \underline{U}_i \cdot \underline{I}_i^* \quad P_o + jQ_o = 3 \cdot \underline{U}_o \cdot \underline{I}_o^*$$

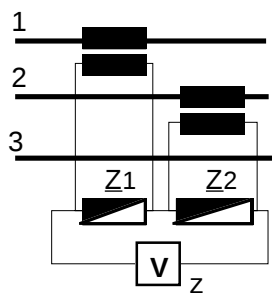
A *potência de uma componente por fase* é a potência resultante da acção da respectiva componente de tensão com a respectiva componentes de corrente. A *potência de uma componente do sistema trifásico* é o triplo da potência dessa componente por fase. Se numa montagem directa existir uma potência (activa ou reactiva) inversa ou homopolar, então a montagem está desequilibrada. Considerando a potência flutuante, como a parte real da soma dos produtos dos valores simbólicos, ou seja $P_f = U_a \cdot I_a + U_b \cdot I_b + U_c \cdot I_c$, que se reduz às componentes simétricas como $P_f = 3 \cdot U_d \cdot I_d + 3 \cdot U_i \cdot I_i + 3 \cdot U_o \cdot I_o$, verifica-se que numa montagem equilibrada em tensões e correntes eléctricas essa potência flutuante tem um valor nulo; porque, nesse caso, $U_i = I_i = I_o = 0$.

1.2 Medida das Componentes Simétricas

Existem várias montagens de aparelhos de medida convencionais que permitem detectar as componentes directa, inversa ou homopolar das tensões, intensidade de corrente, e potências.

Medida da Intensidade da Corrente num Circuito Trifásico Sem Neutro Acessível

Como o circuito trifásico não tem neutro acessível não é possível circular a componente homopolar da corrente eléctrica. Assim, esta montagem apenas permitirá detectar a componente directa e inversa da intensidade de corrente eléctrica.



Com o auxílio de dois transformadores de medida de intensidade (TI) alimenta-se um circuito formado por duas impedâncias de valor conhecido em série; cada transformador alimenta uma das impedâncias. Um voltímetro mede a tensão nos terminais da série de impedâncias.

Para simplificar, e para uma melhor compreensão, considera-se que a razão de transformação dos transformadores de intensidade é unitária $k = 1$. Neste caso a corrente que passa no amperímetro é $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$.

$$\underline{U} = k \cdot \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_1 + k \cdot \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_2 = \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_1 + \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_2$$

Como não existe componente homopolar,

$$\underline{U} = \underline{Z}_1 \cdot (\underline{I}_d + \underline{I}_i) + \underline{Z}_2 \cdot (a^2 \cdot \underline{I}_d + a \cdot \underline{I}_i) = \underline{I}_d \cdot (\underline{Z}_1 + a^2 \cdot \underline{Z}_2) + \underline{I}_i \cdot (\underline{Z}_1 + a \cdot \underline{Z}_2)$$

Com uma escolha criteriosa do valor das impedâncias de forma que um dos factores seja nulo, pode-se medir o valor da outra componente:

Para determinar $\underline{I}_d$ faz-se $(\underline{Z}_1 + a \cdot \underline{Z}_2) = 0$,

$$\text{ou } \underline{Z}_2 = -(\underline{Z}_1/a) \quad \text{ou} \quad \underline{Z}_2 = -\underline{Z}_1 \cdot a^2 = \underline{Z}_1 \cdot ((1/2) + j(\sqrt{3}/2)).$$

Se for $\underline{Z}_1 = R + j0$, isto é uma resistência puramente óhmica, será $\underline{Z}_2$ constituída por uma bobina com resistência R_2 e indutância L_2 tal que $\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2 = R \cdot ((1/2) + j(\sqrt{3}/2))$ com

$$R_2 = R/2 \quad \text{e} \quad \omega L_2 = R \cdot (\sqrt{3}/2)$$

Verifica-se que neste método de medida há necessidade de previamente construir uma resistência e uma bobina de forma que a razão das resistências respectivas seja 1/2 e que o ângulo de esfasamento criado pela indutância seja de $\pi/3$. Tal pode ser feito utilizando uma ponte de medida de resistência e um fasímetro.

Como o voltímetro mede $\underline{U} = I_d \cdot R(1-a)$ e a amplitude de $I_d = U/(R \cdot \sqrt{3})$

De uma forma análoga proceder-se-ia para determinar a amplitude da componente inversa $\underline{I}_i$.

Para determinar $\underline{I}_i$ faz-se $(\underline{Z}_1 + a^2 \cdot \underline{Z}_2) = 0$,

ou $\underline{Z}_2 = -(\underline{Z}_1/a^2)$ ou $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_1 \cdot a$ o que fisicamente se traduz por permutar as impedâncias $\underline{Z}_2$ e $\underline{Z}_1$.

Para não ter de permutar os dois componentes $\underline{Z}_2$ e $\underline{Z}_1$ faz-se uma montagem com um comutador a alimentar o voltímetro, e que servirá para a determinação de I_d e de I_q .

“A expressão coordenadas simétricas é preferível à expressão mais comumente utilizada componentes simétricas. A primeira é mais lógica num sentido matemático porque se refere aos eixos de referência {referencial}, mas o último nome é provavelmente mais descritivo do processo para o leigo.”

C. L. Fortescue, 1933

1.3 Sistemas Trifásicos Não Sinusoidais

As máquinas eléctricas podem encontrar-se num regime de funcionamento envolvendo um sistema trifásico simétrico de grandezas periódicas não sinusoidais. Tendo a máquina um comportamento linear, e obedecendo as grandezas $g(t)$ às condições de Dirichlet: a função $g(t)$ é finita; a função $g(t)$ tem um número limitado de pontos de descontinuidade e de pontos extremos, cada grandeza pode ser representada por uma série de termos harmónicos — *série de Fourier*. Assim, existirá um sistema trifásico, formado pelos mesmos termos harmónicos das grandezas cada uma das três fases.

Apesar de na maioria dos casos reais existirem apenas harmónicos de ordem ímpar, devido ao campo magnético da máquina ter uma alternância de pólos, analisar-se-ão as características dos sistemas trifásicos harmónicos para todas as ordens.

$$g_k(t_k) = A_0 + \sum_{h=1}^M A_h \cdot \cos(h\omega t_k + \varphi_h)$$

Atendendo a que cada termo harmónico tem um ângulo de fase igual ao produto da ordem do harmónico pelo ângulo de fase fundamental da grandeza não sinusoidal — $(\omega\tau - \alpha) = n \cdot (\omega - \alpha)$ —, e o esfasamento das diferentes grandezas do sistema trifásico simétrico é de $2\pi/3$ rad; resulta:

1. o termo fundamental $h = 1$ tem uma ordem de sucessão de fases (sequência de sucessão) — $\underline{R} = (\omega t - \varphi)$; $\underline{S} = (\omega t - \varphi) - (2\pi / 3)$; $\underline{T} = (\omega t - \varphi) - (4\pi / 3)$ — de um sistema trifásico simétrico *directo*.
2. o termo de segunda ordem $h = 2$ tem uma ordem de sucessão de fases (sequência de sucessão) — $\underline{R} = 2 \cdot (\omega t - \varphi)$; $\underline{S} = 2 \cdot (\omega t - \varphi) - (4\pi / 3) = 2 \cdot (\omega t - \varphi) + (2\pi / 3)$; $\underline{T} = 2 \cdot (\omega t - \varphi) - (8\pi / 3) = 2 \cdot (\omega t - \varphi) + (4\pi / 3)$ — de um sistema trifásico simétrico *inverso*.
3. o termo de terceira ordem $h = 3$ tem uma ordem de sucessão de fases (sequência de sucessão) — $\underline{R} = 3 \cdot (\omega t - \varphi)$; $\underline{S} = 3 \cdot (\omega t - \varphi) - (6\pi / 3) = 3 \cdot (\omega t - \varphi) - (2\pi)$; $\underline{T} = 3 \cdot (\omega t - \varphi) - (12\pi / 3) = 3 \cdot (\omega t - \varphi) - (4\pi)$ — análoga à de um sistema trifásico simétrico *homopolar*.

E, procedendo-se da mesma forma, verifica-se que os termos harmónicos, cuja ordem fosse um múltiplo da ordem do sistema trifásico ($m = 3$), formavam um sistema trifásico de fasores sinfásicos, como se o sistema trifásico fosse um sistema com uma ordem de sucessão (sequência de sucessão) homopolar.

Para os restantes termos harmónicos — $4^\circ, 5^\circ, 6^\circ, \dots$ — repetir-se-á a série de ordens de sucessão de fase (sequência de fase) — *directo, inverso e homopolar*.

Note Bem que apenas a ordem de sucessão (sequência de sucessão) de fases de uma grandeza simétrica coincide com a ordem de sucessão (sequência de sucessão) de fases de um sistema trifásico componente simétrico da mesma grandeza assimétrica para aquela frequência do harmónico. A amplitude e o ângulo de fase terão valores diferentes!

h	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
Sist.	d	i	h	d	i	h	d	i	h	d	...

1.4 Outras Sistemas Polifásicos de Componentes Simétricas

Nas Máquinas Eléctricas podem ser utilizados sistemas polifásicos, como o sistema difásico e o sistema hexafásico. Também para estes sistemas é possível obter uma decomposição do sistema assimétrico nos sistemas simétricos de grandezas, recorrendo a uma transformação passiva.

Sistema Hexafásico

O sistema hexafásico foi utilizado nalgumas máquinas eléctricas rotativas — comutatrizes — e em transformadores de número de fases trifásico-hexafásicos associados a rectificadores.

sistema hexafásico simétrico — é um sistema de seis grandezas sinusoidais, com a mesma frequência com o mesmo valor eficaz, e tal que duas grandezas consecutivas estão esfasadas, uma relativamente à outra, por um múltiplo inteiro do intervalo angular $(2\pi / 6) = (\pi / 3)$ rad.

A aplicação do Método das Componentes simétricas leva a que um sistema hexafásico assimétrico {A, B, C, D, E, F} de grandezas seja decomponível em seis sistemas

hexafásicos simétricos {0, 1, 2, 3, 4, 5}; para cada sistema hexafásico simétrico as grandezas têm a mesma amplitude e uma diferença de fase uniforme que é um múltiplo inteiro do ângulo característico $(2\pi/6) = (\pi/3)$ rad.

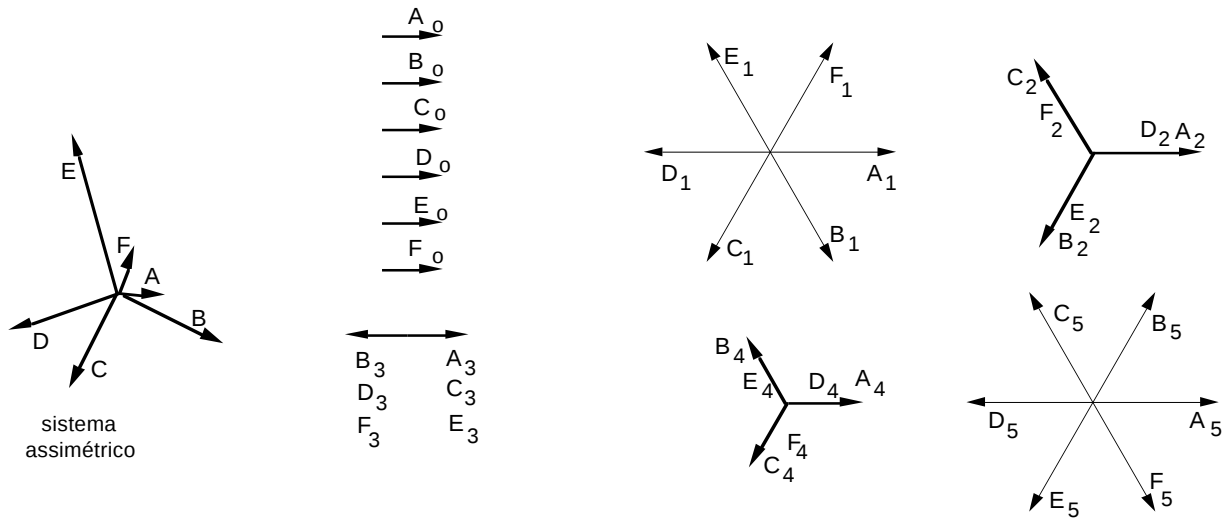


Fig. 1.7 — Sistema hexafásico assimétrico e os seis sistemas componentes simétricos

O sistema hexafásico assimétrico é decomponível (ver fig. 1.7) em: um sistema hexafásico homopolar (sequência zero), com índice zero 0 {o ângulo de diferença de fase é $0 = 0 \cdot (\pi/3)$ }; é um sistema hexafásico directo (sequência um) com índice 1 {o ângulo de diferença de fase é $(\pi/3) = 1 \cdot (\pi/3)$ }; dois sistemas trifásicos directos (sequência dois) {dois sistemas trifásicos sobrepostos} com índice 2 {o ângulo de diferença de fase é $(2\pi/3) = 2 \cdot (\pi/3)$ }; dois sistemas trifásicos homopolares {em oposição de fase}, com índice 3 {o ângulo de diferença de fase é $(\pi) = 3 \cdot (\pi/3)$ }; dois sistemas trifásicos inversos (sequência quatro) {dois sistemas trifásicos sobrepostos} com índice 4 {o ângulo de diferença de fase é $(4\pi/3) = 4 \cdot (\pi/3)$ ou $(-2 \cdot \pi/3)$ }; um sistema hexafásico inverso (sequência cinco) com índice 5 {o ângulo de diferença de fase é $(\pi/3) = 5 \cdot (\pi/3)$ ou $(-\pi/3)$ }.

Considerando que para o sistema hexafásico de grandezas alternadas sinusoidais o operador a tem por expressão $a = 1 \cdot \pi/3$, e efectuando um conjunto de operações análogas às que foram feitas para o sistema trifásico, obtem-se a matriz de transformação $[F_6]$, tal que $\{G_A, G_B, G_C, G_D, G_E, G_F\}_T = [F_6] \cdot \{G_0, G_1, G_2, G_3, G_4, G_5\}_T$.

$$[F_6] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^5 & a^4 & a^3 & a^2 & a \\ 1 & a^4 & a^2 & 1 & a^4 & a^2 \\ 1 & a^3 & 1 & a^3 & 1 & a^3 \\ 1 & a^2 & a^4 & 1 & a^2 & a^4 \\ 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 \end{bmatrix}$$

a transformação inversa $[F_6]^{-1}$,

tal que $\{G_0, G_1, G_2, G_3, G_4, G_5\}_T = [F_6]^{-1} \cdot \{G_A, G_B, G_C, G_D, G_E, G_F\}_T$

$$[F_6]^{-1} = \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 \\ 1 & a^2 & a^4 & 1 & a^2 & a^4 \\ 1 & a^3 & 1 & a^3 & 1 & a^3 \\ 1 & a^4 & a^2 & 1 & a^4 & a^2 \\ 1 & a^5 & a^4 & a^3 & a^2 & a \end{bmatrix}$$

Sistema Difásico

É importante notar que para construir um sistema difásico de grandezas alternadas sinusoidais simétricas pode-se considerar um sistema polifásico simétrico com duas fases ($m = 2$) e com um ângulo característico de diferença de fase $2\pi/2 = \pi$. Nesse caso verificava-se que a potência instantânea fornecida pelo sistema $p = u_1 \cdot i_1 + u_2 \cdot i_2$ não é constante, mas tem um andamento pulsatório em torno de um valor médio.

$$\text{Se } u_1 = \sqrt{2} UI \cos(\omega t) \quad \text{e} \quad u_2 = \sqrt{2} UI \cos(\omega t - \pi), \text{ e}$$

$$i_1 = \sqrt{2} UI \cos(\omega t) \quad \text{e} \quad i_2 = \sqrt{2} UI \cos(\omega t - \pi - \varphi)$$

resulta que :

$$p = u_1 \cdot i_1 + u_2 \cdot i_2 = 2 UI \cos(\varphi) + UI \cdot [\cos(2\omega t - \varphi) + \cos(2\omega t - \varphi - 2\pi)]$$

Desta forma o sistema considerado não seria um sistema de cargas equilibradas — a sua potência instantânea não é constante. Mas, se tomarmos $m=4$ e apenas considerarmos duas fases consecutivas — sistema hemi-tetrafásico — a potência instantânea será constante.

Considerando um sistema tetrafásico simétrico, com um ângulo característico de $2\pi/4 = \pi/2$, a diferença angular entre duas fases consecutivas é $\pi/2$, e será:

$$u_1 = \sqrt{2} UI \cos(\omega t); \quad u_2 = \sqrt{2} UI \cos(\omega t - (\pi/2))$$

$$i_1 = \sqrt{2} UI \cos(\omega t); \quad i_2 = \sqrt{2} UI \cos(\omega t - (\pi/2) - \varphi)$$

e

$$p = u_1 \cdot i_1 + u_2 \cdot i_2 = 2 UI \cos(\varphi) + UI \cdot [\cos(2\omega t - \varphi) + \cos(2\omega t - \varphi - (2\pi/2))] = 2 UI \cos(\varphi)$$

Neste caso a potência instantânea é constante e igual à potência média — estas duas fases consecutivas formam um *sistema hemi-simétrico*. As grandezas de fase formam um sistema de cargas equilibradas, ou sistema equilibrado.

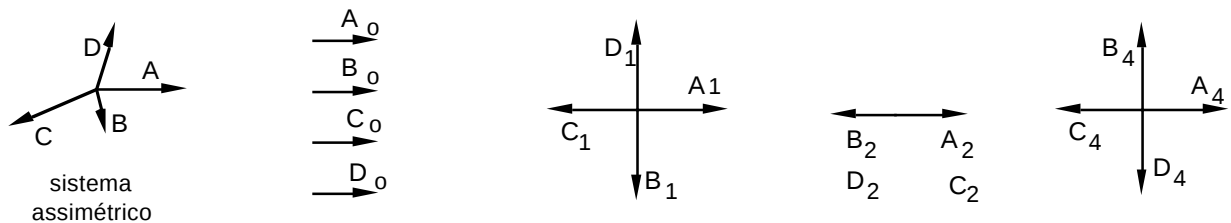


Fig. 1.7 — Sistema tetrafásico assimétrico e os quatro sistemas componentes simétricos

Um sistema tetrafásico assimétrico decompõe-se em quatro sistemas tetrafásicos simétricos: um sistema tetrafásico homopolar (sequência zero), com índice zero 0 {o ângulo de diferença de fase é $0 = 0 \cdot (\pi/2)$ }; é um sistema tetrafásico directo (sequência um) com índice 1 {o ângulo de diferença de fase é $(\pi/2) = 1 \cdot (\pi/2)$ }; dois sistemas difásicos homopolares (em oposição de fase), com índice 2 {o ângulo de diferença de fase é $(\pi) = 2 \cdot (\pi/2)$ }; um sistema tetrafásico inverso (sequência três) com índice 3 {o ângulo de diferença de fase é $(3\pi/2) = 3 \cdot (\pi/2)$ ou $(-\pi/2)$.

Considerando que para o sistema tetrafásico de grandezas alternadas sinusoidais o operador a tem por expressão $a = 1 \cdot \pi/2 = j$, e efectuando um conjunto de operações análogas às que foram feitas para o sistema trifásico, obtinha-se a matriz de transformação $[F_4]$, tal que $\{G_A, G_B, G_C, G_D\}_T = [F_4] \cdot \{G_0, G_1, G_2, G_3\}_T$.

$$[F_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [F_4]^{-1} = \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}$$

tal que $\{G_0, G_1, G_2, G_3\}_T = [F_4]^{-1} \cdot \{G_A, G_B, G_C, G_D\}_T$

Como no estudo das Máquinas Eléctricas Difásicas — reais como no estudo do motor de indução “monofásico”, ou fictícias como no estudo pela Teoria Generalizada do modelo d-q das diferentes máquinas eléctricas rotativas de corrente alternada — as componentes homopolares (sequência 0 e sequência 2) não tomam parte na conversão electromecânica de energia. Assim só interessam as componentes simétricas directa (sequência 1) e inversa (sequência 3).

Numa máquina eléctrica rotativa de corrente alternada polifásica só surgem campos girantes se existirem bobinas esfasadas no espaço de $2\pi/m$ rad e percorridas por correntes esfasadas no tempo de $2\pi/m$ rad. Assim, como as componentes homopolares não contribuem para a criação de campos girantes, e não contribuem para a criação de binário, ou para a conversão electromecânica de energia

Considerando num sistema tetrafásico apenas duas fases consecutivas, verifica-se que $G_C = -G_A$ e $G_D = -G_B$. O que aplicado á equação $\{G_0, G_1, G_2, G_3\}_T = [F_4]^{-1} \cdot \{G_A, G_B, G_C, G_D\}$ se traduz por $\{G_0, G_1, G_2, G_3\}_T = [F_4]^{-1} \cdot \{G_A, G_B, -G_A, -G_B\}$, de onde resulta que atendendo à definição do operador $j = 1 \cdot \pi/2 = a$:

$$G_0 = 0 \quad ; \quad G_1 = (1/2) \cdot (G_A + jG_B) = G_d \quad ; \quad G_2 = 0 \quad ; \quad G_3 = (1/2) \cdot (G_A - jG_B) = G_i$$

O que permite obter a transformação inversa da componente simétrica difásica $\{G_d, G_i\}_T = [F_2]^{-1} \cdot \{G_A, G_B\}_T$, com

$$[F_2]^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix}$$

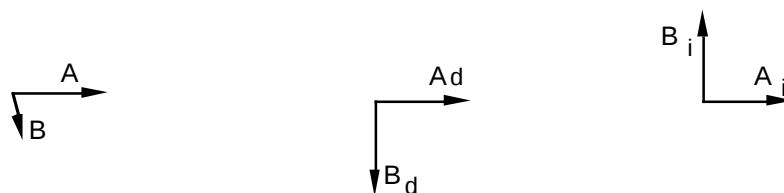


Fig. 1.8 — Sistema difásico assimétrico e os dois sistemas componentes simétricos

Outra forma de obter esta matriz de transformação seria atender a que o operador a tem por expressão $a = 1 \cdot \pi / 2 = j$, e efectuando um conjunto de operações análogas às que foram feitas para o sistema trifásico, obtinha-se primeiro a matriz de transformação $[F_2]$, tal que $\{G_A, G_B\}_T = [F_2] \cdot \{G_d, G_i\}_T$, com

$$[F_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix}$$

e depois a matriz de transformação inversa $[F_2]^{-1}$, tal que $\{G_d, G_i\}_T = [F_2]^{-1} \cdot \{G_A, G_B\}_T$, com

$$[F_2]^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix}$$

Na Teoria Generalizada das Máquinas Eléctricas a matriz de transformação $[F_2]$ representa a matriz $[C'_3]$ a que se junta uma linha e uma coluna, dando origem à matriz $[C_3]$, para se efectuar operações em cascata com matrizes 3×3 .

2. Aplicação às Máquinas Eléctricas

O Método das Componentes Simétricas permite efectuar o estudo das Máquinas Eléctricas quando funcionam em regime permanente assimétrico. Nessa situação a aplicação do Método permite decompor um sistema trifásico de tensões assimétrico em três sistemas trifásicos simétricos de tensões: um sistema directo, um sistema inverso e um sistema homopolar. Analisando o comportamento da máquina eléctrica quando alimentado por cada um dos sistemas componentes isoladamente, é possível prever os efeitos de uma situação de funcionamento num regime permanente assimétrico. A análise daqueles efeitos permite estabelecer normas ou guias, como a publicação CEI 892, e permite, também, deduzir regras de aplicação das protecções a usar na previsão daquela situação de alimentação.

Prioritariamente o Método das Componentes Simétricas é aplicado no estudo das máquinas eléctricas simétricas alimentadas por grandezas trifásicas assimétricas ou alimentado cargas desequilibradas. No entanto o Método pode ser aplicado a máquinas eléctricas desequilibradas por construção.

Máquina Eléctrica Equilibrada é uma máquina que possui conjuntos de enrolamentos trifásicos estatóricos e rotóricos simétricos e uma relutância magnética que é independente da posição relativa do estator e do rotor.

No caso das máquinas eléctricas síncronas, o turboalternador (máquina de rotor cilíndrico) é uma máquina eléctrica equilibrada, enquanto que o alternador com roda polar é uma máquina eléctrica desequilibrada.

O Método das Componentes Simétricas, quando aplicado ao estudo das máquinas eléctricas, provoca a separação (segregação) das diferentes variáveis através de uma transformação linear sobre as equações de funcionamento da máquina eléctrica. Desta forma, reduz-se o estudo global do funcionamento da máquina eléctrica alimentada por um sistema de tensões não equilibrado ao estudo das consequências da aplicação de cada um dos seus sistemas de tensões simétricos componentes à máquina eléctrica. Trata-se de um método, cuja aplicação se baseia em três hipóteses (simplificativas) de estudo das máquinas eléctricas:

- o circuito magnético tem propriedades lineares, existindo uma relação constante entre o fluxo magnético e a corrente eléctrica que o cria;
- a máquina eléctrica tem conjuntos equilibrados de enrolamentos rotóricos e de enrolamentos estatóricos, e
- a relutância do circuito magnético é independente da posição relativa do estator e do rotor nas máquinas eléctricas rotativas.

2.1 Grandezas Eléctricas

A Teoria das Máquinas Eléctricas de Corrente Alternada desenvolveu-se com base na consideração absoluta de que as grandezas físicas eram exclusivamente grandezas alternadas sinusoidais. No entanto a necessidade de consideração do funcionamento das máquinas de corrente alternada polifásicas em regime assimétrico, e a utilização sistemática do Método das Componentes Simétricas, levou à detecção de situações em que conceitos anteriormente definidos já não eram aplicáveis.

As grandezas físicas relacionadas com a potência — *potência activa, potência reactiva e factor de potência* — são conceitos que ficaram desactualizados quando deixou de se considerar apenas um regime de funcionamento permanente, sinusoidal e equilibrado e se passou a considerar um regime de funcionamento permanente, sinusoidal e assimétrico. Ocorrendo a mesma situação quando se passou a considerar que as grandezas físicas alternadas embora periódicas tinham um andamento não sinusoidal.

Veja que a situação é semelhante à passagem da corrente contínua para a corrente alternada sinusoidal. Em corrente contínua a potência é o produto da Tensão pela Intensidade da Corrente (ou seja o produto da leitura do voltímetro pela leitura do amperímetro), enquanto que em corrente alternada já não é sempre assim. E daí surgir a necessidade da introdução do conceito de factor de potência

A procura de uma nova definição para os antigos conceitos ou a criação de novos e complementares conceitos criou situações em que é necessário criar novos métodos e novos instrumentos de medida, isto quando as novas definições podem ser utilizadas no projecto de instrumentos de medida.

Num sistema trifásico sinusoidal em regime assimétrico as grandezas eléctricas — tensão simples e intensidade de corrente — representadas pelos respectivos fasores têm diferente amplitude e diferente ângulo de fase.

$$\begin{aligned} u_a &= \sqrt{2} \cdot U_a \cdot \cos(\omega t - \alpha_a) & i_a &= \sqrt{2} \cdot I_a \cdot \cos(\omega t - \varphi_a) \\ u_b &= \sqrt{2} \cdot U_b \cdot \cos(\omega t - \alpha_b - (2\pi/3)) & i_b &= \sqrt{2} \cdot I_b \cdot \cos(\omega t - \varphi_b - (2\pi/3)) \\ u_c &= \sqrt{2} \cdot U_c \cdot \cos(\omega t - \alpha_c - (4\pi/3)) & i_c &= \sqrt{2} \cdot I_c \cdot \cos(\omega t - \varphi_c - (4\pi/3)) \end{aligned}$$

→ A *potência instantânea* — que traduz a variação da energia no tempo num determinado ponto do circuito eléctrico. — continua a ser representada pela soma algébrica das potências instantâneas por fase: $p = u_a \cdot i_a + u_b \cdot i_b + u_c \cdot i_c$ [W].

→ A *potência activa* [W] — é a soma algébrica das potências activas de cada fase e representa o valor médio da potência instantânea no intervalo de um período (T) no momento de observação (t_0).

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p \cdot dt$$

$$P = P_a + P_b + P_c$$

→ Quando se trabalha com componentes simétricas trifásicas — com tensões simples U_d, U_i, U_o , intensidade de corrente eléctrica I_d, I_i, I_o , e ângulos de esfasamento $\varphi_d, \varphi_i, \varphi_o$ — podem considerar-se a *potência activa directa* (P_d), a *potência activa inversa* (P_i) e a *potência activa homopolar* (P_o):

$$P_d = 3 \cdot U_d \cdot I_d \cdot \cos(\varphi_d); \quad P_i = 3 \cdot U_i \cdot I_i \cdot \cos(\varphi_i); \quad P_o = 3 \cdot U_o \cdot I_o \cdot \cos(\varphi_o)$$

a potência activa total é: $P = P_d + P_i + P_o$.

→ A *energia reactiva* oscila entre a fonte e as bobinas, e os condensadores e as massas em movimento que fazem parte do sistema electromecânico. O valor médio desta variação de energia é nulo, portanto a transferência de energia entre a fonte e a carga é nula.

Considerando que a *potência reactiva* [var] é a amplitude da variação no tempo da potência instantânea oscilante. Para uma fase:

$$Q_f = \frac{1}{2\pi} \oint v \cdot di = \frac{-1}{2\pi} \oint i \cdot dv = \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} v \frac{di}{dt} dt = \frac{-1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} i \frac{dv}{dt} dt = \frac{-1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} v (\int i di) dt$$

$$Q_f = \frac{1}{T} \int_{t_o}^{t_o+T} i (\int v dv) dt = U \cdot I \cdot \sin(\varphi_f)$$

A potência reactiva total será dada por $Q = Q_a + Q_b + Q_c$.

→ Quando se utilizam as componentes simétricas, existirá uma *potência reactiva directa* (Q_d), uma *potência reactiva inversa* (Q_i), e uma *potência reactiva homopolar* (Q_o).

$$Q_d = 3 \cdot U_d \cdot I_d \cdot \sin(\varphi_d); \quad Q_i = 3 \cdot U_i \cdot I_i \cdot \sin(\varphi_i);$$

$$Q_o = 3 \cdot U_o \cdot I_o \cdot \sin(\varphi_o)$$

a potência reactiva total é: $Q = Q_d + Q_i + Q_o$.

→ A *potência aparente por fase* [VA] — que em máquinas eléctricas se traduz pelo produto do valor eficaz da tensão nominal pelo valor eficaz da intensidade de corrente nominal (a potência aparente é uma grandeza escalar) e que representa a máxima potência que máquina pode converter —, é dada pelo produto da tensão simples e da intensidade de corrente em cada fase.

$$S_a = U_a \cdot I_a \quad S_a = P_a^2 + Q_a^2$$

$$S_b = U_b \cdot I_b \quad S_b = P_b^2 + Q_b^2$$

$$S_c = U_c \cdot I_c \quad S_c = P_c^2 + Q_c^2$$

→ Mas, devido ao carácter assimétrico do regime de funcionamento, considera-se uma *potência aparente aritmética* [VA], — soma da potência aparente das fases — tal que

$$S_A = S_a + S_b + S_c$$

mas para a potência aparente aritmética verifica-se que $S_A \neq \sqrt{P^2 + Q^2}$.

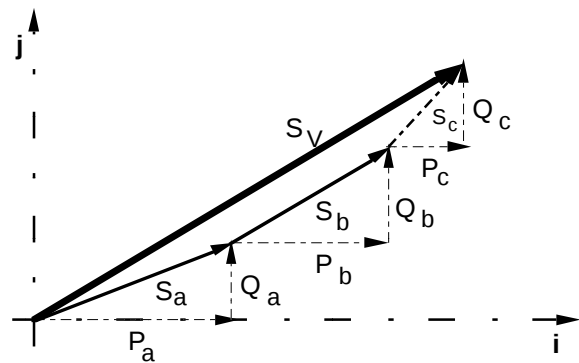
→ Na situação de sistemas assimétricos também se considera a *potência aparente vectorial* [VA], para o qual se considera:

$$S_V = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad \text{e} \quad S_V = |P_a + P_b + P_c + j(Q_a + Q_b + Q_c)| = |P + jQ|$$

Quando se utilizam as componentes simétricas, existirá uma *potência aparente vectorial* (S_V).

$$S_V = S_V = |P_d + P_i + P_o + j(Q_d + Q_i + Q_o)|$$

Note bem que se trata do módulo de uma grandeza vectorial, resultante da representação num referencial ortonormado com dois eixos (i,j) e com coordenadas — potência activa segundo o eixo i, e potência reactiva segundo o eixo j



→ Agora já é possível definir a potência aparente vectorial para as componentes simétricas [VA]: *potência aparente vectorial directa* (S_d), *potência aparente vectorial inversa* (S_i), *potência aparente vectorial homopolar* (S_o).

$$S_d = |S_d| = |P_d + jQ_d| ; S_i = |S_i| = |P_i + jQ_i| ; S_o = |S_o| = |P_o + jQ_o|$$

$$S_V = |S_d + S_i + S_o|$$

$$\text{mas } S_A \neq S_d + S_i + S_o$$

Estas diferentes definições levam à construção de instrumentos de medida diferentes, que no mesmo circuito apresentam valores diferentes para as grandezas.

Note-se que no estudo dos Sistemas Eléctricos se considera o sistema trifásico como uma unidade: $S_{Sis} = U \cdot I$, pelo que $S_{Sis} \geq S_A \geq S_V$.

No estudo das Grandezas Alternadas Sinusoidais simétricas definiu-se factor de potência como uma razão entre a potência activa e a potência aparente $\lambda = (P/S)$ {que com grandezas alternadas sinusoidais é igual ao coseno do ângulo de esfasamento entre a tensão e a intensidade da corrente eléctrica $\lambda = \cos(\varphi)$ }.

→ Quando se considera um regime assimétrico podem-se considerar um *factor de potência aritmético* (λ_A), e um *factor de potência vectorial* (λ_V).

$$\text{factor de potência aritmético} \quad \lambda_A = (P/S_A)$$

$$\text{factor de potência vectorial} \quad \lambda_V = (P/S_V)$$

normalmente será especificado o factor de potência vectorial; e verifica-se que:

$$\lambda_A \leq \lambda_V \leq \lambda$$

→ No entanto pode-se utilizar apenas o *factor de potência directo*, definido como $\lambda_d = (P_d/S_d)$, que apenas permite avaliar as condições de fluxo de potência directa no circuito.

Um sistema formado por uma fonte de energia eléctrica com grandezas sinusoidais e formando um sistema trifásico simétrico directo $\{U_a, U_b, U_c\}$, e alimentando uma carga linear e desequilibrada, é possível substituir a carga desequilibrada por uma carga equilibrada equivalente, isto é uma carga equilibrada que alimentada com a mesma tensão da fonte utiliza a mesma energia activa e reactiva. Esta carga equivalente (virtual) tem, portanto, as mesmas perdas de energia, que a carga assimétrica (real).

Para essa carga será:

$$\text{Tensão equivalente — } U_e = \sqrt{\frac{U_a^2 + U_b^2 + U_c^2}{3}}$$

$$\text{Intensidade de corrente equivalente — } I_e = \sqrt{\frac{I_a^2 + I_b^2 + I_c^2}{3}}$$

→ Pode-se agora definir a *potência aparente equivalente* [VA]:

$$S_e = 3 \cdot U_e \cdot I_e$$

→ O *factor de potência equivalente* é

$$\lambda_e = P/S_e$$

Os estudos de Qualidade de Serviço Eléctrico e a consideração no estudo das Máquinas Eléctricas da situação actual de funcionamento das redes eléctricas obrigam a considerar a existência simultânea de assimetria no regime de funcionamento da máquina e o andamento não sinusoidal das grandezas físicas. Por isso há que considerar a decomposição das grandezas físicas com andamento não sinusoidal através da sua decomposição em série de Fourier de termos harmónicos simultaneamente com a decomposição dos sistema assimétrico nas suas componentes simétricas. Esse tipo de estudo requer a definição de outras grandezas — principalmente novas componentes da potência aparente — que, embora ainda em discussão devem ser tomadas em consideração.

2.2 Máquinas Eléctricas Estáticas

Para além do transformador, na aplicação útil da Electricidade utilizaram-se ao longo do último século outras máquinas eléctricas estáticas como o amplificador magnético.

A aplicação do Método das Componentes Simétricas no estudo das máquinas eléctricas estáticas aplica-se apenas ao estudo de curto-circuitos assimétricos e à determinação das impedâncias para as componentes simétricas.

O raciocínio feito sobre o comportamento dos transformadores em regime assimétrico é do tipo:

Quando a máquina eléctrica está submetida a um sistema de grandezas assimétricas, como as máquinas por construção apresentam simetria nos respectivos circuitos de fase e se considera que estão num regime de funcionamento linear, pode-se considerar que o seu funcionamento resulta da

acção simultânea, mas independente, de três sistemas de grandezas — um sistema com ordem de sucessão directa, um sistema com sequência inversa e um sistema homopolar.

Mas sendo a máquina eléctrica estática não existe qualquer diferença no funcionamento com um sistema de grandezas trifásicas simétrico directo ou com um sistema de grandezas trifásicas simétrico inverso — apenas há uma troca de duas fases no sistema trifásico de alimentação (inversão de fases).

Num transformador com um circuito magnético de fluxos ligados continua a verificar-se que $\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = \phi_1 + \phi_3 + \phi_2 = 0$.

Como consequência verifica-se que uma máquina estática simétrica não pode distinguir entre a alimentação por um sistema simétrico directo ou por um sistema simétrico inverso, por isso, a impedância de sequência directa é igual à impedância de sequência inversa $\underline{Z}_i = \underline{Z}_d$. {mas existe diferença entre as duas impedâncias nas máquinas eléctricas rotativas}

Já a impedância que a máquina oferece ao estabelecimento das correntes homopolares — impedância homopolar — é muito diferente da impedância directa e da impedância inversa. E também tem valores diferentes conforme a corrente circula numa única das bobinas (situação análoga à do transformador em vazio) ou circula nas duas bobinas (situação análoga à do transformador em carga).

Se o circuito trifásico do transformador é assimétrico — como na ligação Scott de transformadores monofásicos ou na ligação em V (triângulo aberto) — surgirá um conjunto de impedâncias de sequência mais complicado.

Exemplo_2.1

Um autotransformador trifásico tem a ligação dos enrolamentos YNy. Pretendendo conhecer a impedância homopolar do transformador, verifica-se que as correntes homopolares só podem circular no lado primário (estrela com neutro ligado). Dessa forma a impedância homopolar do enrolamento do primário, único em que as correntes homopolares podem circular, é a impedância de magnetização. No secundário, o transformador actua como um circuito aberto para as correntes homopolares.

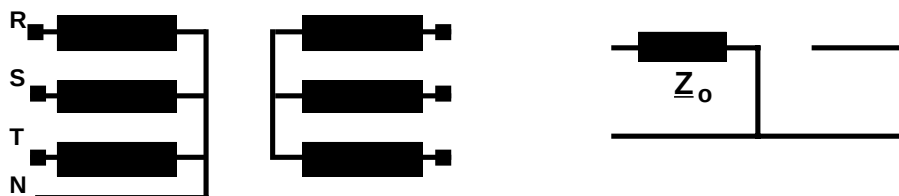


Fig. 2.1 – Impedância homopolar de um transformador YNy

Existem situações nas redes de energia eléctrica em que, sendo a relação entre a tensão primária e a tensão secundária pequena, utiliza-se uma autotransformador trifásico na ligação de duas redes {exemplo: 130 kV e 150 kV}. Procura-se uma vantagem como um menor tamanho ou um menor custo da unidade.

Um tipo de autotransformador com algumas vantagens é o autotransformador com ligação em zigue-zague dos enrolamentos parciais que formam o enrolamento de cada fase.

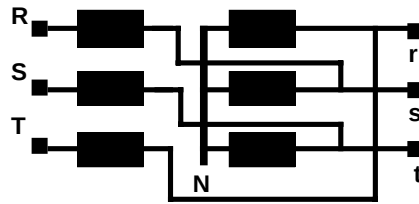


Fig. 2.2 – Autotransformador com ligação dos enrolamentos parciais em zigue-zague.

Em cada coluna do núcleo magnético existem dois semi-enrolamentos, onde se desenvolvem forças electromotrizes síncricas, mas esfasadas de 120° ($2\pi/3$ rad) com as forças electromotrizes que se desenvolvem nas outras colunas.

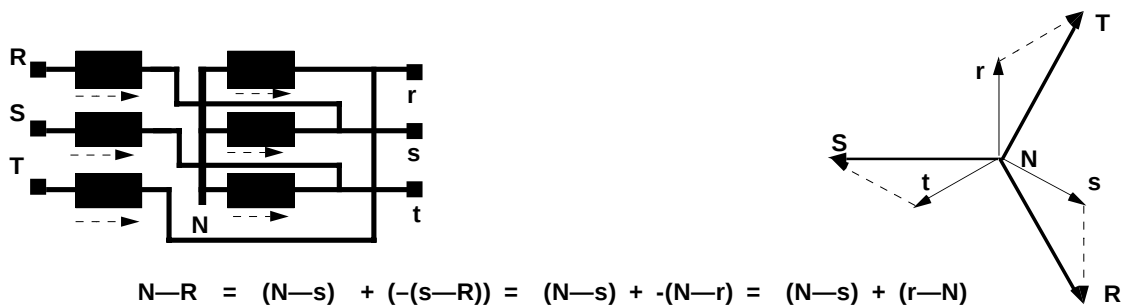


Fig. 2.3 – Determinação da estrela de tensões simples primárias [R, S, T] a partir da estrela de tensões simples secundária [r, s, t]

Considerando que a ligação dos enrolamentos é feita, atendendo ao sentido de desenvolvimento das forças electromotrizes no enrolamento (indicado pela pequena seta em linha interrompida), de forma a subtrair as forças electromotrizes de dois semi-enrolamentos situados em colunas distintas, resulta a estrela de tensões simples no primário [R, S, T], obtida a partir da estrela de tensões simples no secundário [r, s, t].

Com a construção adoptada para os enrolamentos resulta que:

- numa situação de cargas equilibradas, o autotransformador não é percorrido pela corrente de carga da instalação — a capacidade do autotransformador, quando o neutro está ligado à terra, depende apenas da tensão da linha e da corrente de curto-circuito admissível;
- com um sistemas de cargas desequilibradas a corrente de desequilíbrio que percorre o circuito do neutro divide-se igualmente pelas três fases (um terço por cada fase);
- a ligação entre os enrolamentos para a corrente que passa no circuito do neutro é praticamente não indutiva (salvo para a reactância de fugas, que é pequena), como se torna evidente considerando que a força magnetomotriz em cada coluna é a diferença da força magnetomotriz criada em cada semi-enrolamento (que são iguais).

Assim em cada coluna a força magnetomotriz criada por um semi-enrolamento é anulada pela força magnetomotriz que se desenvolve no outro, sem produzir fluxo magnético no núcleo ferromagnético, apenas produzindo fluxo magnético de fugas no espaço (ar) entre os dois semi-enrolamentos. Daí a correspondente reactância de fugas.

Este tipo de autotransformador é utilizado para fazer a ligação do neutro à terra .

Numa situação de regime assimétrico de funcionamento, a componente homopolar do sistema trifásico assimétrico de correntes eléctricas não contribui para a magnetização do núcleo, porque as forças magnetomotrizes, cada uma criada num semi-enrolamento de uma coluna, anulam-se. Consequentemente a tensão necessária para manter a componente homopolar da corrente por fase iguala o produto da intensidade da corrente pela soma da impedância de fugas de cada semi-enrolamento.

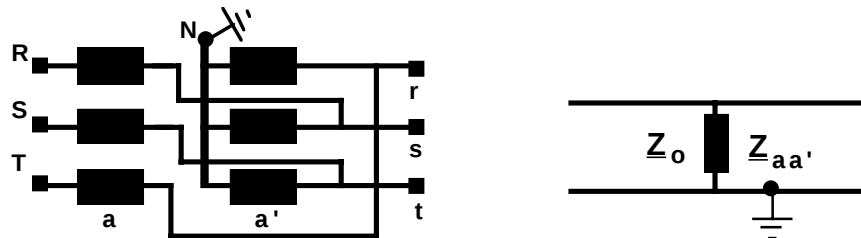


Fig. 2.4 – Circuito equivalente para a componente homopolar de um autotransformador

2.3 Máquina Eléctrica Rotativa — motor de indução

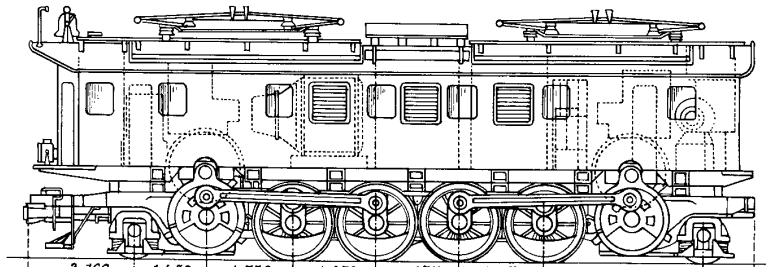
As recomendações da publicação CEI-892 —sobre o comportamento do motor de indução em regime assimétrico — dizem respeito aos motores de indução com o rotor em curto-circuito. Estes motores, numa primeira aproximação, podem ser considerados como máquinas eléctricas simétricas, e que verificam as condições de estudo para aplicação do Método das Componentes Simétricas.

Por construção, e em respeito pela norma expressa na publicação da Comissão Electrotécnica Internacional nº 34.1 § 12, os motores eléctricos de indução podem funcionar quando as tensões de alimentação formam um sistema praticamente simétrico, isto é um sistema em que a componente inversa e a componente homopolar não excedem 2% da componente directa.

Nessas condições de estudo, este tipo de motores podem ser representados por um circuito eléctrico equivalente, análogo ao da figura 2.5, para cada fase.

A partir desse circuito é possível estabelecer um conjunto de expressões para as principais grandezas que se pretendem analisar: corrente eléctrica, binário, potência absorvida, etc... Apenas há que considerar o sistema de tensões que está aplicado ao motor e os parâmetros respectivos para o esquema equivalente.

Em 1915 a empresa Norfolk and Western Railway (USA) electrificou a linha Bluefield-Vivian com 48 km de extensão e inclinações de 20%, destinada a comboios de transporte de carvão (3000 a 4000 ton). Foi adoptado o motor de indução trifásico alimentado a partir de um sistema de tensão monofásico 11 kV 25 Hz (linha aérea). Tal como em 1917 tinha sido adoptado numa locomotiva [1C+C1] da P R R (Pennsylvania Rail-Road).



Locomotiva NWR, 1922, [1BB1]

A alimentação do motor de indução trifásico ($p = 2$ e $p = 4$) seria feita a 725 V por conversores rotativos monofásico-trifásico {máquinas reversíveis que permitiam a recuperação de energia}. Nessa época existia a convicção que um conversor baseado numa máquina de indução (grupo Arno) teria as melhores características de funcionamento como conversor de fase. No entanto o sistema de tensões trifásico resultante da conversão era assimétrico e o motor de indução trifásico de accionamento da locomotiva funcionava em regime assimétrico.

2.3.1 — Estudo do Motor de Indução

A análise do funcionamento do motor é feita para cada sistema de tensões de uma forma individualizada, mas os efeitos resultantes dessa aplicação são considerados na sua globalidade e como resultado da sua actuação simultânea.

Sistema directo — Os efeitos de aplicação de um sistema trifásico simétrico e directo de tensões a um motor de indução encontram-se estudados, [4], porque correspondem à situação normal de funcionamento do motor. O estudo desta situação pode ser feito por um esquema eléctrico equivalente para cada fase, como o da figura 2. Nesta situação, a forma de onda da força magnetomotriz criada pelo sistema directo de correntes eléctricas é girante com uma velocidade angular ω_s , de que resulta um deslizamento para o rotor, $s = (\omega_s - \omega_r) / \omega_s$, característico do funcionamento do motor.

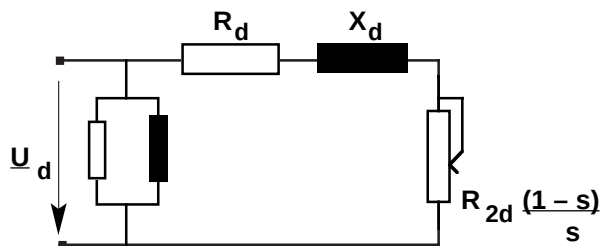


Fig. 2 .5 – Esquema eléctrico equivalente directo

Para este circuito eléctrico pode escrever-se uma equação que traduz a presença da tensão aplicada a uma fase, a tensão directa, das quedas de tensão nas resistências dos circuitos estatórico e rotórico, e nas reactâncias de fugas dos dois circuitos. Também se encontra representada por uma resistência variável a acção de carga mecânica no veio do motor.

Sistema inverso — este sistema trifásico simétrico de tensões dá origem a um sistema inverso de correntes eléctricas que criam um forma de onda da força magnetomotriz girante, mas que se desloca no sentido contrário ao da onda de força magnetomotriz criada pelo sistema directo. Trata-se de uma situação igual à que resulta de trocar as fases aplicadas a dois terminais do enrolamento do motor.

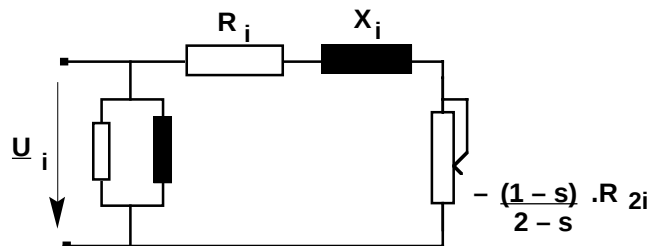


Fig. 2.6 – Esquema eléctrico equivalente inverso

O valor da velocidade angular da forma de onda girante inversa é $-\omega_s$, e o valor do deslizamento do rotor do motor é dado por $(2 - s)$. O campo magnético resultante, nas condições de estudo citadas, também será um campo girante e as barras de material condutor do circuito rotórico vão ser sede de forças electromotrizes de amplitude e frequência elevadas. Como estas barras estão curto-circuitadas vão ser percorridas por correntes eléctricas mais elevadas do que as que resultam da alimentação com um sistema directo de tensões. Com este valor mais elevado das correntes eléctricas as perdas por efeito Joule são agravadas relativamente à alimentação com um sistema trifásico simétrico directo. Devido à frequência destas correntes eléctricas, as perdas eléctricas são, ainda, agravadas pelo efeito pelicular e pelo efeito de proximidade nas barras condutoras. Também as perdas magnéticas no circuito rotórico vêm agravadas. O sistema trifásico de correntes eléctricas inversas vai ser responsável pelo aparecimento de um binário electromotor com sentido contrário ao desejado.

Sistema homopolar — neste sistema trifásico as tensões são sinfásicas, e só tem efeitos se a ligação das três fases do enrolamento permitir a circulação de uma corrente eléctrica, como no caso da ligação em triângulo (corrente na malha) ou na ligação em estrela com neutro acessível. A acção conjunta da corrente eléctrica sinfásica ao percorrer as três bobinas iguais e esfasadas no espaço de 120° produz um campo magnético nulo. Desta forma o sistema homopolar não contribui para a conversão de energia eléctrica em mecânica. Atendendo à análise feita apenas a parte estatórica da máquina contribui para o esquema equivalente homopolar, através duma resistência eléctrica e de uma reactância de fugas do enrolamento estatórico (um circuito eléctrico passivo).

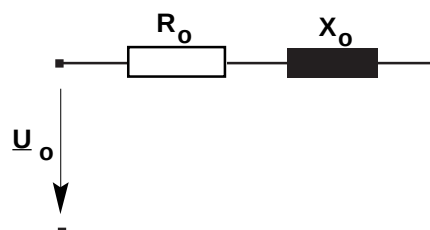


Fig. 4 – Esquema eléctrico equivalente homopolar

A vantagem da aplicação do Método das Componentes Simétricas resulta de numa situação de alimentação do motor por um sistema de tensões desequilibrado se poder estudar cada sistema simétrico componente separadamente. Depois, e devido às condições de linearidade estabelecidas, pode-se aplicar o princípio da sobreposição para determinar os efeitos globais, sobre o motor, daquele tipo de alimentação.

2.3.2 — Consequências do Regime Assimétrico

A alimentação de um motor de indução, com rotor em curto-circuito, por um sistema

desequilibrado de tensões tem um conjunto de consequências sobre as respectivas características de funcionamento, [2], que podem ser justificadas através da aplicação do Método das Componentes Simétricas.

Binário – devido à presença simultânea de dois binários motores desiguais e com sentidos contrários, o binário resultante tem um valor menor do que é apresentado quando o motor é alimentado apenas por um sistema simétrico de tensões. Devido ao andamento da curva da característica mecânica $T(s)$ do motor de indução trifásico apenas há para cada valor do deslizamento uma ligeira diminuição do binário, que é pequena nas zonas de funcionamento normal do motor.

Velocidade – devido à ligeira diminuição do binário motor, à plena carga, a velocidade do motor diminui, porque fica inalterado o valor do binário de carga.

Ruído e Vibração – a presença de dois campos magnéticos girantes em sentido contrário leva a uma distribuição global do campo magnético na zona do entreferro que, na zona de fronteira ar-ferro, dá origem ao aparecimento de forças que são susceptíveis de criar problemas de ruído e de vibrações na estrutura do motor, principalmente quando o desequilíbrio de tensões é elevado.

Correntes Eléctricas – nos terminais do motor a impedância para a componente inversa é muito pequena, quando comparada com a impedância para a componente directa, assim, para uma pequena componente inversa da tensão de alimentação resulta uma componente inversa da corrente eléctrica de valor elevado. A presença das duas componentes da corrente eléctrica no circuito estatórico do motor eléctrico traduz-se por um aumento considerável das perdas por efeito Joule, e, consequentemente, do aquecimento da máquina. No circuito rotórico, como a componente inversa da corrente eléctrica tem uma frequência superior à da componente directa da corrente eléctrica, resulta que a resistência eléctrica oferecida pelo circuito rotórico é maior e são também maiores as perdas Joule, o que não tem inconveniente devido à ausência de materiais isolantes. Desse calor produzido no rotor só uma pequena parte pode afectar o estator devido à ventilação do motor.

O calor produzido no circuito estatórico devido à presença das duas componentes da corrente eléctrica, a componente directa e a componente inversa, e principalmente o aquecimento extra produzida por esta componente, é suficiente para elevar a temperatura de tal forma que podem correr perigo os materiais isolantes do enrolamento estatórico. Por isso, há que diminuir os valores nominais das grandezas características do motor; o que obriga a máquina a funcionar com valores de potência útil inferiores aos expressos na chapa de características. Tal diminuição, dada através de um factor de diminuição dos valores nominais, para valores da percentagem de desequilíbrio da tensão, superiores a 1% e inferiores a 5%, encontra-se representada na figura 1 da publicação CEI-892.

Naquela publicação, CEI-892 §5, também são feitas recomendações sobre os critérios e a prática a adoptar com os sistemas de protecção do motor, quando os valores nominais das grandezas características do motor são diminuídos, para responder às consequências do desequilíbrio do sistema de tensões de alimentação.

2.3.3 — Análise Crítica

O estudo do funcionamento do motor de indução trifásico tal como é feito na publicação

CEI-892 apresenta algumas deficiências quando é analisado através dos conhecimentos contemporâneos sobre Máquinas Eléctricas.

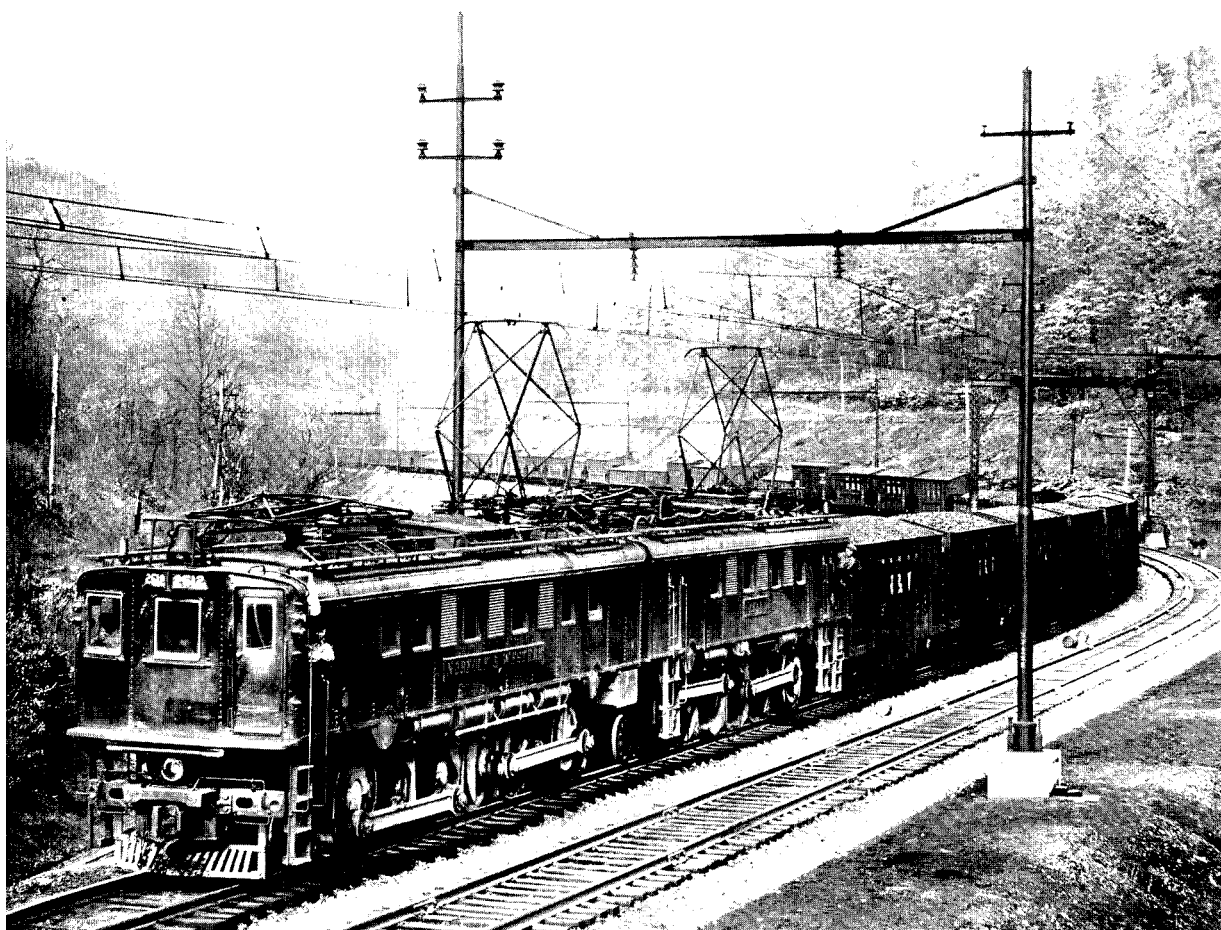
Modelo do Motor Eléctrico – num motor de indução existem partes do circuito magnético que se encontram em saturação durante o funcionamento do motor. Por isso não corresponde à realidade a consideração que o circuito magnético é linear, ou que é constante a relação entre o fluxo magnético e a corrente eléctrica que o cria. Também se sabe que não existe simetria eléctrica, ou magnética, nos circuitos do motor de indução. Hoje, no modelo do motor de indução entra-se em consideração com fenómenos como, efeito das ranhuras, distribuição dos condutores do enrolamento, distribuição real do campo magnético de fugas, etc... Como resultado destas considerações a forma da onda da força magnetomotriz só será girante se se desprezarem os termos harmónicos espaciais introduzidos pela assimetria da máquina. O campo magnético no entreferro da máquina, terá uma componente girando em sentido contrário ao movimento rotórico, apenas devido aos aspectos construtivos da máquina. O campo magnético no motor, devido à saturação de partes do circuito magnético, terá uma forma de onda rica em termos harmónicos temporais. Também, a existência de uma componente inversa da corrente eléctrica com frequência elevada obriga a considerar o efeito pelicular e o efeito de proximidade nos condutores rotóricos.

Desequilíbrio de Correntes Eléctricas – apesar de motivado pelo desequilíbrio do sistema de tensões de alimentação, o desequilíbrio das correntes eléctricas é muito mais importante, porque são estas que condicionam o aquecimento da máquina eléctrica. O desequilíbrio das correntes eléctricas depende do desequilíbrio das tensões, mas também depende da impedância para as componentes simétricas do motor. Esta impedância varia muito com o tipo de motor, sendo mais pequena num motor com o rotor em curto-circuito, do tipo gaiola simples. Hoje, conhecidos os parâmetros do circuito eléctrico equivalente é possível efectuar um estudo, com carácter computacional, que forneça o factor de actualização da potência útil do motor para uma dada situação de desequilíbrio.

As Redes de Alimentação Contemporâneas – as redes eléctricas de alimentação dos motores de indução, principalmente as do tipo industrial, são percorridas por correntes eléctricas com formas de onda ricas em termos harmónicos. As perdas por efeito Joule nos circuitos eléctricos são aumentadas porque são as perdas equivalentes às provocadas por uma corrente eléctrica de valor eficaz $I_{ef} = (\sum_h I_h^2)^{1/2}$, [6]. Este valor, que é superior ao valor eficaz da corrente sinusoidal permite prever que as perdas eléctricas no motor, e o consequente aquecimento, são superiores aos que são considerados pela simples decomposição do sistema desequilibrado de tensões de alimentação.

2.3.4 — Conclusão

Hoje, a consideração simultânea do desequilíbrio do sistema de tensões de alimentação, da poluição harmónica nas redes de alimentação, e de um modelo que represente os fenómenos físicos próprios do motor de indução trifásico, com rotor em curto-circuito, obrigam a prever que o aquecimento do motor será superior ao admitido quando, na fase de projecto, se estabeleceram as suas características de funcionamento, dentro das tolerâncias estabelecidas nas normas. Assim, as indicações apresentadas na publicação 892 da Comissão Electrotécnica Internacional são optimistas.



Comboio com Locomotivas mono-trifásicas NWR, [1BB1+1BB1], 1922

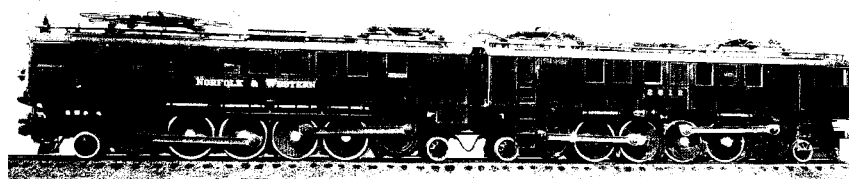
C. L. Fortescue numa nota biográfica relata que:

A fábrica de auto-transformadores de arranque de motores de indução trifásicos (auto-transformador variável) queixou-se que as máquinas “não aguentavam”. Devido a uma razão “inexplicável” os auto-transformadores não permitiam que o motor desenvolvesse um binário de arranque conveniente, absorviam uma corrente mais elevada que o previsto e aqueciam fortemente!

Qual a causa dessa anomalia ?

Bibliografia

- Manuel Corrêa de Barros; "Apontamentos para a Disciplina de Electrotecniá Teórica", AEFEUP, 1971
- Rodrigo Sarmiento Beires; "Electricidade Aplicada 1ª Parte — Correntes Fortes", Engenharia 1952/53
- Carlos Castro Carvalho; "Apontamentos para a Disciplina de Máquinas Eléctricas II", FEUP 1983
- Carlos Castro Carvalho; "Complementos de Máquinas Eléctricas", FEUP, 1985
- Manuel Vaz Guedes; "Corrente Alternada — sistemas polifásicos"; FEUP 1993
- Manuel Vaz Guedes; "Grandezas Periódicas Não Sinusoidais"; FEUP 1992
- C. L. Fortescue; "Method of Symmetrical Co-Ordinates Applied to the Solution of Polyphase Networks", Trans. AIEE 37/II, pp. 1027–1140, 1918
- C. L. Fortescue; "Polyphase Power Representation by Means of Symmetrical Coordinates", Trans. AIEE 39/II, (abstract), pp. 1481–1484, 1920
- C. F. Wagner R. D. Evans; "Symmetrical Components", McGraw-Hill, 1933
- Comissão Electrotécnica Internacional, publicação CEI-05; "Vocabulaire Electrotechnique International – Définitions Fondamentales", 1954
- Comissão Electrotécnica Internacional, publicação CEI-50(131 A); "Vocabulaire Electrotechnique International – Circuits et Composantes Polyphasés", 1982
- Comissão Electrotécnica Internacional, Publicação 892; "Effects of Unbalanced Voltages on the Performance of Three-Phase Cage Induction Motors, 1987
- Comissão Electrotécnica Internacional, Publicação 34.1; "Rotating Electrical Machines – Part 1 Rating and Performance, 1969
- J. Lewis Blackburn; "Symmetrical Components for Power Systems Engineering", Marcel Dekker 1993
- MIT EE Staff; "Electrical Circuits", MIT Press, 1940
- Pen-Tung Sah; "Fundamentals of Alternating-Current Machines", McGraw-Hill 1946
- Westinghouse Electric Corporation; "Electrical Transmission and Distribution Reference Book", 1950



Apêndice A – Representação das Grandezas Alternadas Sinusoidais

As grandezas alternadas sinusoidais podem ser representadas de diversas formas conforme a conveniência do estudo que está a ser feito e dos meios de cálculo disponíveis.

Representação matemática

Neste tipo de representação utiliza-se uma função matemática para expressar o comportamento da grandeza eléctrica. É o tipo de representação utilizado para caracterizar o valor instantâneo de uma grandeza $\varnothing$ $g(t) = \sqrt{2} G \cos(\omega t + \varphi)$.

Representação fasorial

No estudo dos sistemas eléctricos de corrente alternada utiliza-se frequentemente a representação fasorial das grandezas eléctricas. Trata-se de uma representação geométrica, na forma polar, que a cada grandeza faz corresponder um fasor caracterizado por um módulo, igual ao valor eficaz da grandeza, $|\underline{G}| = G$, e um direcção relativamente a um eixo origem igual ao ângulo de fase, $\angle \underline{G} = \theta = \omega t + \varphi$.

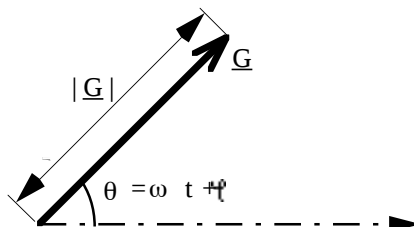


Fig. A.1 - Representação fasorial

Note-se que o valor instantâneo da grandeza alternada sinusoidal g obtém-se multiplicando por $\sqrt{2}$ a projecção do fasor sobre o eixo da origem dos ângulos.

Neste tipo de representação as diferentes operações aritméticas sobre as grandezas alternadas sinusoidais traduzem-se por operações geométricas sobre os fasores representativos das diferentes grandezas.

No trabalho com grandezas alternadas sinusoidais ocorre frequentemente a associação das duas representações, fasorial e simbólica, sobre o nome de *fasor*.

Representação simbólica

É um tipo de representação das grandezas alternadas sinusoidais em que se utilizam números complexos. Uma grandeza é representada por um número complexo $\underline{G}$ formado por uma parte real, a , e por uma parte imaginária, b , afectada pelo operador $j = \sqrt{-1}$, assim $\underline{G} = a + jb$.

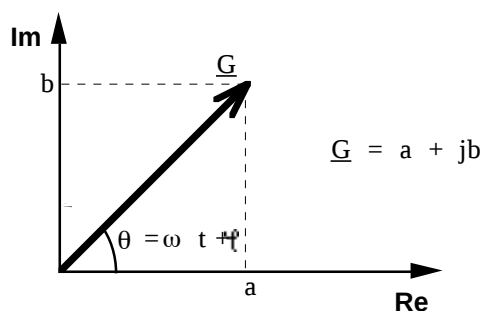


Fig. A.2 - Representação simbólica

O operador $j = \sqrt{-1}$ é caracterizado por promover uma rotação de $\pi/2$ rad no sentido directo, ou trigonométrico, quando é aplicado a um fasor. Verifica-se que $j^2 = -1$, $j^3 = -j$, e $j^4 = 1$.

Baseado no teorema de Euler, $e^{j\beta} = \exp(j\beta) = \cos \beta + j \sin \beta$, que é uma propriedade da

função exponencial no domínio complexo, é possível representar uma grandeza alternada sinusoidal com números complexos.

$$\underline{G} = G e^{j\theta} = G \exp(j\theta) = G(\cos \theta + j \sin \theta) = G \cos \theta + jG \sin \theta = a + jb \quad (\text{a.1})$$

Atendendo à correspondência expressa em (a.1), verifica-se que:

$$a = G \cos \theta \quad e \quad b = G \sin \theta$$

Atendendo à figura A.2, também se verifica que:

$$\theta = \arctg(b/a) \quad e \quad G = (a^2 + b^2)^{1/2}$$

Para evitar a escrita frequente da função exponencial pode utilizar-se para a representação simbólica das grandezas alternadas sinusoidais uma notação devida a Kenelly: $\underline{G} = G \angle \theta$.

Na aplicação da notação simbólica aos circuitos eléctricos resulta para a lei de Ohm em corrente alternada a expressão $\underline{U} = \underline{Z} \underline{I}$. Se $\underline{U} = U \angle 0$ e $\underline{I} = I \angle -\phi$, o cociente $\underline{U}/\underline{I}$ é igual a $(U/I) \angle \phi = Z \angle \phi$. Atendendo à figura A.2 pode-se escrever $\underline{U}/\underline{I} = R + jX = \underline{Z}$.

A determinação da derivada, em ordem ao tempo, de uma grandeza sinusoidal pode ser feita com o auxílio da notação simbólica,

$$\begin{aligned} d\underline{G}/dt &= d[\sqrt{2} G \sin(\omega t + \alpha)]/dt = \omega \sqrt{2} G \cos(\omega t + \alpha) = \\ &= \omega \sqrt{2} G \cos(\omega t + \alpha + \pi/2) = \omega \sqrt{2} G e^{j(\omega t + \alpha)} e^{j(\pi/2)} \\ &= j\omega \underline{G} \end{aligned}$$

A derivação em cálculo simbólico traduzir-se-á na multiplicação da grandeza por $j\omega$, ou seja, em multiplicar a grandeza por ω e esfasá-la de $\pi/2$ no sentido trigonométrico, em avanço.

A integração em cálculo simbólico traduzir-se-á na divisão da grandeza por $j\omega$, ou seja em dividir a grandeza por ω e esfasá-la de $\pi/2$, no sentido anti-trigonométrico; em atraso.

As grandezas alternadas sinusoidais, em estudo, podem ser uma função do tempo através do ângulo de fase $(\omega t + \Psi)$; $b(t) = B_m \cos(\omega t + \Psi)$. Nesse caso diz-se que as grandezas são representadas pelo *fasor temporal*, ou simplesmente pelo *fasor* $\underline{b} = B_m \exp(j\Psi)$.

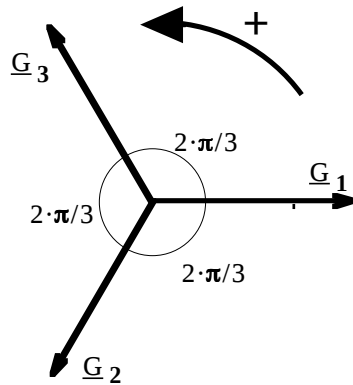
Mas as grandezas alternadas sinusoidais, também, podem ser apenas função de um ângulo espacial através do ângulo de direcção $(\alpha - \alpha_0)$; $f(\alpha) = F_m \cos(\alpha - \alpha_0)$. Então, diz-se que as grandezas são representadas pelo *fasor espacial*, $\underline{f} = F_m \exp(j\alpha_0)$. A representação simbólica destas grandezas será, respectivamente: $\underline{b} = \underline{b} \exp(j\omega t)$, e $\underline{f} = \underline{f} \exp(j\alpha)$.

Apêndice B – Sistema Trifásico Simétrico

Sistema Trifásico Simétrico — sistema de três grandezas sinusoidais com a mesma frequência, com o mesmo valor eficaz e tais que duas grandezas consecutivas estão esfasadas,

uma relativamente à outra, por um múltiplo do intervalo angular ($2\pi/3$).

As três grandezas trifásicas, g_1 g_2 g_3 , podem suceder-se segundo duas sequências (ordem de sucessão) distintas, formando um sistema de grandezas *directo*, ou um sistema de grandezas *inverso*, (tomando como positivo o sentido trigonométrico, ou contrário ao movimento dos ponteiros de um relógio analógico).



$$g_1 = \sqrt{2} G \cos \omega t$$

$$g_2 = \sqrt{2} G \cos(\omega t - 2\pi/3)$$

$$g_3 = \sqrt{2} G \cos(\omega t - 4\pi/3)$$

Fig. B.1 - Sistema trifásico de grandezas (*directo*) — representação fasorial

Sistema directo

$$g_1 = \sqrt{2} G \cos(\omega t + \varphi)$$

$$g_2 = \sqrt{2} G \cos(\omega t + \varphi - 2\pi/3)$$

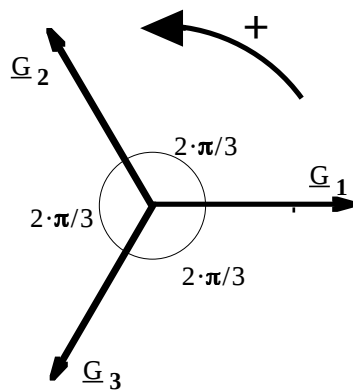
$$g_3 = \sqrt{2} G \cos(\omega t + \varphi - 4\pi/3)$$

Sistema inverso

$$g_1 = \sqrt{2} G \cos(\omega t + \varphi)$$

$$g_2 = \sqrt{2} G \cos(\omega t + \varphi + 2\pi/3)$$

$$g_3 = \sqrt{2} G \cos(\omega t + \varphi + 4\pi/3)$$



$$g_1 = \sqrt{2} G \cos \omega t$$

$$g_2 = \sqrt{2} G \cos(\omega t + 2\pi/3)$$

$$g_3 = \sqrt{2} G \cos(\omega t + 4\pi/3)$$

Fig. B.2 - Sistema trifásico de grandezas (*inverso*) — representação fasorial

Apêndice C – Circuito Trifásico Equilibrado

Um sistema trifásico de impedâncias é equilibrado (ou simétrico) quando está distribuído igualmente entre os condutores das fases, resultando que as impedâncias de cada fase têm amplitude igual e que os seus ângulos de fase são iguais, $Z_a = Z_b = Z_c$.